Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 9:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 10.12
Abgabe der Hausübungen am 17.12

1 Präsenzübungen:

1.1 Sattelpunktsnäherung

i) Bestimmen Sie $I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \ \exp(isz^2)$ mit Hilfe der Sattelpunktsnäherung

Um diese Aufgabe zu lösen, erinnern wir uns zunächst an die in der Vorlesung hergeleitete Formel für die Sattelpunktsnäherung. Sei ein Integral der Form

$$I(s) = \int dz g(z) e^{sf(z)} \quad , s \in \mathbb{R}$$

gegeben und seien f und g holomorph, so lässt es sich im $\lim_{s\to\infty}$ berechnen durch

$$I(s) = \frac{2\pi}{|sf''(z_0)|} g(z_0) e^{sf(z_0)} e^{i\alpha},$$

wobei z_0 der Sattelpunkt der Funktion f ist und $e^{i\alpha}$ durch die steepest descend contour gegeben ist.
Wir können direkt sehen, dass sich unser Integrand schon in einer geeigneten Form für die Sattelpunktsnäherung befindet. Wir identifizieren $g(z) = 1$ und $f(z) = iz^2$. Außerdem bemerken wir, dass beide holomorph sind. Nun gilt es den Sattelpunkt zu bestimmen und die zweite Ableitung an der Stelle des Sattelpunktes.

$$f'(z) \stackrel{!}{=} 0 \to f'(z) = 2iz \stackrel{!}{=} 0 \to z = 0$$
$$f''(z) = 2i \to f''(0) = 2i$$

Für unsere Formel brauchen wir auch noch α, welches durch das Argument der zweiten Ableitung gegeben ist.

$$\arg(f''(z_0) = 2i) = \frac{\pi}{2} \to e^{i\alpha} = ie^{-\frac{i}{2}\arg(f''(z_0))} = ie^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Nun können wir alles in die Formel einsetzen und erhalten das Ergebnis

$$I(s) = \sqrt{\frac{2\pi}{|2s|}} \cdot 1 \cdot e^{s\cdot 0} \cdot ie^{-i\pi/4} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \frac{i(1-i)}{\sqrt{2}} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2s}}$$

ii) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (i) mit dem aus der Vorlesung bekannten exakten Result $I(s) = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2s}}$ und kommentieren Sie den Vergleich

Zunächst bemerken wir, dass die beiden Ergebnisse identisch sind. Wenn man sich jetzt noch einmal anschaut, wie das Ergbenis in der Vorlesung berechnet wurde, so sieht man, dass der Phasenfaktor $e^{i\pi/4}$ bei der Wahl der Kontour auftaucht. Dies entspricht gerade der steepest descent Kontour, denn es gilt

$$e^{i\alpha} = ie^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}}. \tag{1}$$

Damit berechnen wir in unserer Sattelpunktsnäherung das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-s\frac{t^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} du\ e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-su^2}$$

Es werden also genau die gleichen Integrale berechnet.

1.2 Vektorräume und Skalarprodukt

Zeigen Sie dass für Funktionen $\phi_k(x) = \exp(ikx)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$

i) Die Menge der Funktionen $\left\{ f(x) : f(x) = \sum_k \lambda_k \exp(ikx) \text{ mit } \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen komplexen Vektorraum, also einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ bildet

Benennen wir zunächst die unsere Menge $V = \left\{ f(x) : f(x) = \sum_k \lambda_k \exp(ikx) \text{ mit } \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}$. Dann müssen wir nun zunächst zeigen, dass es sich bei der Menge ausgestattet mit der gewöhnlichen Addition um eine abelsche Gruppe handelt.
Wir können uns nun anschauen, was passiert, wenn wir zwei Elemente unsere Menge summieren.

$$f_1(x) + f_2(x) = \sum_{k_1} \lambda_{1,k_1} \exp(ik_1x) + \sum_{k_2} \lambda_{2,k_2} \exp(ik_2x) = \sum_k (\lambda_{1,k} + \lambda_{2,k}) \exp(ikx) = f_3(x)$$

Wir sehen also, dass es sich dabei um die Addition komplexer Zahlen handelt (was wieder eine komplexe Zahl ergibt). Nun können wir ausnutzen dass es sich bei $\mathbb{C}$ um einen Körper handelt, können wir die Gruppeneigenschaften auf die Gruppeneigenschaft von $\mathbb{C}$ bezüglich der einfachen Addition zurückführen. Damit gilt letztendlich.

Assoziativgesetz

$$f_1(x) + (f_2(x) + f_3(x)) = (f_1(x) + f_2(x)) + f_3(x)$$

Kommutativgesetz

$$f_1(x) + f_2(x) = f_2(x) + f_1(x)$$

Neutrales Element

$$f_1(x) + e = f_1(x) \qquad e = 0 + 0i$$

Inverses Element

$$f_1(x) + (-f_1(x)) = e$$

Als nächstes gilt es zu untersuchen, was bei einer Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}$ geschieht. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\alpha f(x) = \alpha \sum_k \lambda_k \exp(ikx) = \sum_k (\alpha\lambda_k) \exp(ikx) = f_2(x) \quad , \lambda_{2,k} = \alpha\lambda_k \in \mathbb{C}$$

Wir sehen, dass sich die Verknüpfung wieder nur auf Elemente aus $\mathbb{C}$ auswirkt und wir können die verbleibenden Eigenschaften auf die Körpereigenschaften von $\mathbb{C}$ zurückführen.

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta) \cdot f(x) &= \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(x) \\
\alpha \cdot (f_1(x) + f_2(x)) &= \alpha \cdot f_1(x) + \alpha \cdot f_2(x) \\
\alpha \cdot (\beta \cdot f(x)) &= (\alpha \cdot \beta) \cdot f(x) \\
1 \cdot f(x) &= f(x)
\end{aligned}$$

ii) Die Verknüpfung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} dx\ f^*(x)g(x)$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert.[1]

Zunächst zeigen wir die Hermitizität des Skalarproduktes.

$$< f|g >^* = \left(\int_0^{2\pi} dx\ f^* g\right)^* = \int_0^{2\pi} dx\ fg^* = \int_0^{2\pi} dx\ g^* f =< g|f >$$

Als nächstes zeigen wir die Sesquilinearität des Skalarprodukt.

$$\begin{aligned}
< f + h|g > &= \int_0^{2\pi} dx\ (f + h)^* g = \int_0^{2\pi} dx\ (f^* + h^*)g = \int_0^{2\pi} dx\ f^* g + \int_0^{2\pi} dx\ h^* g =< f|g > + < h|g > \\
< \alpha f|g > &= \int_0^{2\pi} dx\ (\alpha f)^* g = \int_0^{2\pi} dx\ \alpha^* f^* g = \alpha^* \int_0^{2\pi} dx\ f^* g = \alpha^* < f|g >
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $< f, f > \geq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $f(x) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
< f|f > &\overset{\text{absolute Konvergenz}}{=} \sum_{k,k'} \lambda_k \lambda_{k'} \int_0^{2\pi} dx\ e^{i(k'-k)x} \\
&= \sum_{k,k',k\neq k'} \lambda_k \lambda_{k'} \left[\frac{e^{i(k'-k)x}}{i(k+k')}\right]_0^{2\pi} + \sum_k |\lambda_k|^2 \int_0^{2\pi} dx\ e^{i0x} = \sum_{k,k',k\neq k'} 0 + \sum_k 2\pi\ |\lambda_k|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Und das Gleichheitszeichen gilt offensichtlich nur, wenn alle $\lambda_k = 0$.

[1] Streng genommen müssen wir noch zusätzlich fordern dass $\sum_k |\lambda_k|$ absolut konvergiert damit die Multiplikation mathematisch rigoros durch das Cauchy Produkt von Reihen definiert werden kann. Das Cauchy Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen ist wieder eine absolut konvergente Reihe.

2 Hausübungen:

2.1 Vektorräume und Skalarprodukt

i) Beweisen Sie dass die Menge der Polynome vom Grad zwei, also $\Big\{p(x)\ :\ p(x) = a + bx + cx^2 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\Big\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen reellen Vektorraum, also einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ bildet

Zunächst zeigen wir wieder die Abgeschlossenheit und dazu schauen wir uns die Addition zweier Polynome vom Grad zwei an.

$$p_1(x) + p_2(x) = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 = p_3(x)$$

Es handelt sich hier wieder um ein Polynom zweiter Ordnung. Insbesondere sind die Koeffizienten wieder reelle Zahlen. Damit haben wir also wieder ein Element aus unserer Menge. Wir können weiterhin bemerken, dass sich die Addition nur auf die Koeffizienten auswirkt, weshalb wir die Gruppeneigenschaften von $\mathbb{R}$ bezüglich der einfachen Addition ausnutzen können. Somit handelt es sich bei unserer Menge ausgestattet mit der gewöhnliche Addition um eine abelsche Gruppe und wir haben wieder Assoziativität, Kommutativität, Existenz eines neutralen und eines inversen Elementes gezeigt.
Es muss noch betrachtet werden, wie sich die Multiplikation mit eine Element aus $\mathbb{R}$ auf die Vektoren auswirkt. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha p_1(x) = \alpha a_1 + (\alpha b_1)x + (\alpha c_1)x^2 = p_2(x)$$

Es handelt sich also auch hier wieder um ein Element aus unserer Menge, da die Koeffizienten wieder reell sind. Und wir können die verbleibenden Eigenschaften auf die Körpereigenschaften von $\mathbb{R}$ zurückführen.

ii) Beweisen Sie, dass die Verknüpfung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\infty dx\ e^{-x}\ f(x)g(x)$$

ein Skalarprodukt auf diesem Vektorraum definiert

Zeigen wir zunächst die Linearität des Skalarproduktes im ersten Argument.

$$\begin{aligned} < \alpha f + h|g > &= \int_0^\infty dx\ e^{-x}(\alpha f(x) + h(x))g(x) \overset{\substack{\text{Linearität}\\\text{Integral}}}{=} \alpha \int_0^\infty dx\ e^{-x} f(x)g(x) + \int_0^\infty dx\ e^{-x} h(x)g(x) \\ &= \alpha < f|g > + < h|g > \end{aligned}$$

Als nächstes folgt die Hermitizität des Skalarproduktes.

$$< f|g >^* = \left(\int_0^\infty dx\ e^{-x} f(x)g(x)\right) = \int_0^\infty dx\ \left(e^{-x}\right)^* f(x)^* g(x)^* = \int_0^\infty dx\ e^{-x} g(x)f(x) =< g|f >$$

Es bleibt nur übrig zu zeigen, dass das Skalarprodukt positiv definit ist.

$$< f|f >= \int_0^\infty dx\ e^{-x} f(x)^2 \geq \int_0^\infty dx\ e^{-x} 0 = 0, \qquad \text{da}\ \ f(x)^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Insbesondere gilt die Gleichheit nur, wenn $f(x) = 0$.

iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis des Vektorraums bezueglich des in (ii) definierten Skalarprodukts

Bevor wir mit dem Gram-Schmidt Verfahren beginnen, bemerken wir das wir das Skalarprodukt berechnen müssen und sich dies auf Integrale der Form $\int_0^\infty e^{-x}x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zurückführen lässt. Aus diesem Grund berechnen wir das Integral zunächst allgemein mit $n \in \mathbb{N}$.

$$\int_0^\infty dx\ e^{-x}x^n \overset{\substack{\text{partielle}\\ \text{Integration}}}{=} [-e^{-x}x^n]_0^\infty - \int_0^\infty dx\ \ -e^{-x}nx^{n-1} = [-e^{-x}x^n]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x}nx^{n-1}$$
$$= \int_0^\infty e^{-x}nx^{n-1}$$

Wir sehen an dieser Stelle also, dass wir nach einem partiellen Integrationsschritt wieder beim ursprünglichen Integral angelangt sind. Allerdings haben wir nun den ursprünglichen Exponenten als Vorfaktor und der Exponent ist nun $n-1$. Der erste Teil der partiellen Integration liefert keinen Beitrag, da es bei ∞ durch das e^{-x} zu Null wird und bei 0 durch das x^n.
Wir können nun so oft die partielle Integration anwenden bis im Integral eine 0 steht, also insgesamt n-mal. Wir sehen, dann auch dass wir dann den Term

$$n![-e^{-x}]_0^\infty = n!$$

erhalten. Dies ist der einzige nicht verschwindende Beitrag.
Beginnen wir nun mit dem eigentlichen Verfahren. Zunächst brauchen wir eine linear unabhängige Basis, die den Vektorraum aufspannt. Wählen wir dafür $w_1 = 1,\ w_2 = x,\ w_3 = x^2$, deren Linearkombination offensichtlich alle Polynome der zweiten Ordnung aufspannt. Wenn wir w_1 normieren haben wir unseren ersten der orthonormalen Vektoren. Dazu berechnen wir $< w_1|w_1 >= \int_0^\infty e^{-x}1\ x^0 = 0! = 1$ und die Norm ist dementsprechend 1. Somit haben wir $v_1 = 1$.
Um den zweiten orthonormalen Vektor zu berechnen muss man zunächst alle Anteile subtrahieren, die mit unseren ersten Vektor überlappen.

$$< v_1|w_2 >=< 1|x > = \int_0^\infty e^{-x}x = 1$$

$$v_2 = \frac{w_2 - 1\ v_1}{||w_2 - 1\ v_1||} = \frac{x-1}{||x-1||}$$

$$||x-1|| = \sqrt{< x-1|x-1 >}$$

$$< x-1|x-1 > = \int_0^\infty dx\ e^{-x}(x^2 - 2x + 1) = 1$$

Wir sehen also, dass $v_2 = x - 1$.
Zur Berechnung des dritten Vektors müssen nun die Anteile abgezogen werden, die nicht ortho-

gonal zu den anderen beiden Vektoren sind.

$$
\begin{aligned}
< v_1|w_3 >=< 1|x > \quad &= \int_0^\infty e^{-x}x^2 = 2 \\
< v_2|w_3 >=< x-1|x > \quad &= \int_0^\infty e^{-x}x^3 - x^2 = 4 \\
v_3 \quad &= \frac{w_3 - 2\ v_1 - 4v_2}{||w_3 - 2\ v_1 - 4v_2||} = \frac{x^2-4x+2}{||x^2-4x+2||} \\
||x^2-4x+2|| \quad &= \sqrt{< x^2-4x+2|x^2-4x+2 >} \\
< x^2-4x+2|x^2-4x+2 > \quad &= \int_0^\infty dx\ e^{-x}(x^2-4x+2)^2 = \int_0^\infty dx\ e^{-x}(x^4-8x^3+20x^2-16x+4) = 4
\end{aligned}
$$

Womit der letzte der orthonormalen Vektoren also $v_3 = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

2.2 Kramers-Kronig Relation

Betrachten Sie die komplexe Funktion $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ deren Realteil die Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0)}{x-x_0} = \frac{1}{1+x_0^2} \tag{2}$$

erfüllt, und von der bekannt sei dass Sie keinerlei Singularitäten in der oberen komplexen Halbebene besitzt sowie für $|z| \to \infty$ verschwindet.

i) Bestimmen Sie den Imaginärteil $v(x,0)$ der Funktion

Erinnern wir uns zunächst and die Kramers-Kronig Relation.

$$
\begin{aligned}
u(x_0,0) &= \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{v(x,0)}{x-x_0} \\
v(x_0,0) &= -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{u(x,0)}{x-x_0}
\end{aligned}
$$

Wir können hier direkt sehen, dass

$$v(x,0) = -\frac{1}{1+x^2}$$

gilt, da wir jedes reelle x_0 in unsere Gleichung einsetzen dürfen.

ii) Bestimmen Sie den Realteil $u(x,0)$ der Funktion

Um den Realteil zu bestimmen können wir nun einfach die andere Gleichung der Kramers-Kronig Relation benutzen und werten das Integral aus.

$$u(x_0,0) = \frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)}$$

Der Integrand hat also nur Pole erster Ordnung und wir der Hauptwert des Integrals ist gegeben durch $P = \frac{1}{2}(L+R)$. Ein Pol haben wir bei x_0 und dieser taucht auch nur im Linkswert des

Integrals auf. Der andere Pol liegt bei $1 + z^2 = 0 \to z = i$. Dieser Pol kommt in beiden Integralen über die obere Halbebene vor. Nun können wir den Residuensatz anwenden, da der obere Halbkreis nach Voraussetzung verschwindet.

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} = \frac{1}{2\pi}(L+R) \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)}$$
$$= \frac{1}{2\pi} 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) + 2\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) \right)$$
$$= i \left(\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) + 2\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) \right)$$

Nun berechnen wir die Residuen und bemerken dafür zunächst, dass sowohl $h(z) = 1$ als auch $g(z) = (1+z^2)(z-x_0) = z + z^3 - x_0 - z^2 x_0$ holomorph sind. Somit lassen sich die Residuen durch $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{h(z)}{g(z)}\right) = h(z_0)/g'(z_0)$ berechnen. Man kann das Residuum allerdings auch durch $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{h(z)}{g(z)}\right) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)h(z)/g(z)$ berechnen, was sich vor allem im Fall $z_0 = x_0$ anbietet.

$$\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) = \lim_{z\to x_0} (z-x_0) \frac{-1}{(1+z^2)(z-x_0)} = \lim_{z\to x_0} \frac{-1}{(1+z^2)} = \frac{-1}{1+x_0^2}$$

$$\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) \overset{\substack{\text{Binomische}\\ \text{Formel}}}{=} \lim_{z\to i} (z-i) \frac{-1}{((z-i)(z+i))(z-x_0)} = \lim_{z\to i} \frac{-1}{(z+i)(z-x_0)}$$
$$= \frac{1}{2+2ix_0} \frac{2-2ix_0}{2-2ix_0} = \frac{1-ix_0}{2+2x_0^2}$$

Dies können wir jetzt nun wieder einsetzen.

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} = i \left(\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) + 2\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) \right)$$
$$= i \left(\frac{-1}{1+x_0^2} + 2 \frac{1-ix_0}{2+2x_0^2} \right) = \frac{x_0}{1+x_0^2}$$

iii) Verifizieren Sie Gl. (2) durch explizite Berechnung des Integrals

Hier gehen wir in bekannter weise vor (analog zu ii)). Wir haben die gleichen Pole. Dann folgt alles weitere.

$$\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) = \frac{x_0}{1+x_0^2}$$
$$\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) = \frac{-x_0-i}{2+2x_0^2}$$

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{x}{(1+x^2)(x-x_0)} = i \left(\mathrm{Res}_{x_0} \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) + 2\mathrm{Res}_i \left(\frac{-1}{(1+x^2)(x-x_0)} \right) \right) = \frac{1}{1+x_0^2}$$

Und somit haben wir die Gleichung (2).

iv) Bestimmen Sie die Funktion $f(z)$ durch analytische Fortsetzung (i.e. durch das ersetzen von $x \in \mathbb{R}$ durch $z \in \mathbb{C}$) und verifizieren Sie die Annahmen hinsichtlich der Position von Singularitäten und des asymptotischen Verhalten der Funktion

Wir haben wissen bisher

$$f(x,0) = u(x,0) + iv(x,0) = \frac{x}{1+x^2} - i\frac{1}{1+x^2}$$

$$\overset{\substack{\text{analystische}\\\text{Fortsetzung}}}{\rightarrow} f(z) = \frac{z}{1+z^2} - i\frac{1}{1+z^2} = \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z+i}$$

Wir sehen, dass $\frac{1}{z+i}$ seine einzige Polstelle bei $z = -i$ besitzt was in der unteren Halbebene liegt. Also besitzt es insbesondere auch keine Polstelle in der oberen Halbebene, was für die Kramers-Kronig Relation ja erforderlich ist. Außerdem gilt $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$.