Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 8:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Heavyside Stufenfunktion

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Funktion

i) $\theta(t) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon}$

Der Integrand hat einen Pol erster Ordnung bei $w = i\epsilon$ mit dem Residuum

$$\mathrm{Res}_{(w=i\epsilon)} \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = e^{-\epsilon t},$$

welches für den Limes $\epsilon \to 0$ Eins wird. Nun wollen wir das Integral zu einer geschlossen Kontour vervollständigen. Dabei müssen wir beachten, dass der Integrand für den Kreisbogen zur Vervollständigung im Unendlichen verschwindet. Dies ist gegeben, wo $|e^{iwt}| = e^{-\mathrm{Im}\, wt}$ gegen Null geht. Für $t < 0$, muss Im w also negativ gegen unendlich gehen und bei $t > 0$, positiv. Beispielsweise parametrisieren wir für $t > 0$ den Kreisbogen γ_R über $w(t) = Re^{i\phi}$ mit $\phi \in [0, \pi)$ uns schätzen das Integral ab:

$$\begin{aligned}
\left|\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \mathrm{d}w \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon}\right| &= \lim_{R\to+\infty} \left| iR \int_0^\pi \mathrm{d}\phi \frac{e^{i\phi} e^{iRe^{i\phi}t}}{Re^{i\phi} - i\epsilon}\right| \\
&\leq \lim_{R\to+\infty} R \int_0^\pi \mathrm{d}\phi \frac{e^{-Rt\mathrm{Im}\,(e^{i\phi})}}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} \\
&\leq \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi R}{\sqrt{R^2+\epsilon^2}} e^{-Rt} = 0.
\end{aligned}$$

Wir schließen also die Kontour für $t < 0$ nach unten und für $t > 0$ nach oben (siehe Abbildung 2). Die obere Kurve umschliesst das Residuum und wir erhalten für $t > 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}w \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \oint_{\alpha(R)} \mathrm{d}w \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathrm{Res}_{(w=i\epsilon)} \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = 1.$$

Für $t < 0$ umschließt die Kurve keinen Pol und wir erhalten

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}w \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to+\infty} \oint_{\beta(R)} \mathrm{d}w \frac{e^{iwt}}{w-i\epsilon} = 0.$$

Ist $t = 0$, so können wir das Integral direkt lösen:

$$
\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}w \frac{1}{w-i\epsilon} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \mathrm{d}w \frac{1}{w-i\epsilon} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \lim_{R\to+\infty} \left[\log(w-i\epsilon)\right]_{-R}^{+R} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon\to 0^+} \lim_{R\to+\infty} \left[\log(\sqrt{w^2+\epsilon^2}) + i\mathrm{Arg}(w-i\epsilon)\right]_{-R}^{+R} \\
&= \frac{i(0-(-\pi))}{2\pi i} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

1.2 Berechnung von Integralen mit Schnitten in der komplexen Ebene

Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\log(x-i)}{(x+i)^2}$ indem Sie den branch cut des Logarithmus wie in Abb.1 eingezeichnet entlang der positiven imaginären Achse legen und

i) die Integrationskontour durch $\tilde{\alpha}(R)$ zu einer geschlossenen Kontour vervollständingen

ii) die Integrationskontour durch $\beta(R)$ zu einer geschlossenen Kontour vervollständingen

Zu i): Setzen wir den Integranden analytisch fort zu $\frac{\log(z-i)}{(z+i)^2}$, und setzen den Branch-Cut wie zu sehen, so bemerken wir, dass nur ein Pol zweiter Ordnung bei $z = -i$ von $\tilde{\alpha}(R)$ eingeschlossen wird und die Funktion sonst holomorph ist. Den Wertebereich der Argumentfunktion wählen wir entsprechend des Branch-Cuts als $\mathrm{Arg}(z) \in [\pi/2, 5\pi/2)$. Das Integral des Bogens $\tilde{\alpha}(R)$ können wir wie folgt abschätzen:

$$
\begin{aligned}
\left| \lim_{R\to+\infty} \int_{\tilde{\alpha}(R)} \mathrm{d}z \, \frac{\log(z-i)}{(z+i)^2} \right| &= \lim_{R\to+\infty} \left| iR \int_0^{-\pi} \mathrm{d}\phi \, \frac{e^{i\phi}\log(Re^{i\phi}-i)}{(Re^{i\phi}+i)^2} \right| \\
&\leq \lim_{R\to+\infty} R \int_0^{-\pi} \mathrm{d}\phi \, \left| \frac{\log(Re^{i\phi}-i)}{(Re^{i\phi}+i)^2} \right| \\
&= \lim_{R\to+\infty} R \int_0^{-\pi} \mathrm{d}\phi \, \left| \frac{\log(Re^{i\phi}-i)}{(Re^{i\phi}+i)^2} \right| \\
&= \lim_{R\to+\infty} R \int_0^{-\pi} \mathrm{d}\phi \, \frac{|\log(\sqrt{R^2-2R\sin(\phi)+1}) + i\mathrm{Arg}(Re^{i\phi}-i)|}{R^2+2R\sin(\phi)+1}.
\end{aligned}
$$

Fig. 1:

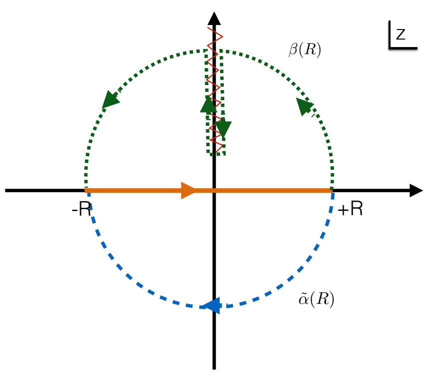
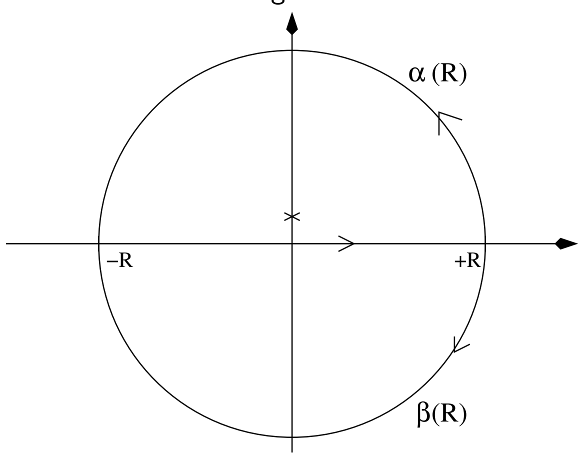


Fig. 2:



Die Argumentfunktion nimmt hier höchstens den Wert 2π an. Der Rest des Bruches wird maximiert, wenn der Nenner am kleinsten und der Zähler am grössten ist. Dies ist der Fall für $\phi = -\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty} R\int_0^{-\pi} \mathrm{d}\phi\, \frac{|\log(\sqrt{R^2-2R\sin(\phi)+1}) + i\mathrm{Arg}(Re^{i\phi}-i)|}{R^2+2R\sin(\phi)+1} &\leq \lim_{R\to+\infty} \pi R\frac{|\log(\sqrt{R^2+2R+1})+i2\pi|}{R^2-2R+1} \\
&= \pi \lim_{R\to+\infty} R\frac{\sqrt{\log^2(\sqrt{R^2+2R+1})+4\pi^2}}{R^2-2R+1} \\
&\approx \pi \lim_{R\to+\infty} \frac{R\log(R)}{R^2} = \pi \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R} \to 0.
\end{aligned}$$

Das Residuum bei $z = -i$ ist

$$\mathrm{Res}_{z=-i}\frac{\log(z-i)}{(z+i)^2} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z+i)^2\frac{\log(z-i)}{(z+i)^2}\right]_{z=-i} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log(z-i)\right]_{z=-i} = \left.\frac{1}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{i}{2}.$$

Entsprechend haben wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\frac{\log(x-i)}{(x+i)^2} = \lim_{R\to+\infty}\oint_{\tilde{\alpha}(R)} \mathrm{d}z\, \frac{\log(z-i)}{(z+i)^2} = -2\pi i\mathrm{Res}_{z=-i}\frac{\log(z-i)}{(z+i)^2} = \pi,$$

da der Pol einmal in negativer Richtung umrundet wird.

Zu ii): Die Kontour $\beta(R)$ schließt keinen Pol ein und vermeidet den Branchcut. Damit ist das Gesamtintegral Null. Die Bögen von $\beta(R)$ lassen sich wie in i) abschätzen und tragen nicht bei. Es bleiben die Kurven, die entlang des Branch-Cuts gehen und unser eigentliches Integral. Wir parametrisieren die Gerade rechts vom Branch-Cut mit $z_1(t) = it+\epsilon$, $t\in[R,1]$ und die links vom Branch-Cut mit $z_2(t) = it-\epsilon$, $t\in[1,R]$. Damit haben wir

$$\lim_{R\to+\infty}\left(\int_{-R}^{+R}\mathrm{d}x\frac{\log(x-i)}{(x+i)^2} + i\lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{+R}^{1}\mathrm{d}t\frac{\log(i(t-1)+\epsilon)}{(i(t+1)+\epsilon)^2} + \int_1^{+R}\mathrm{d}t\frac{\log(i(t-1)-\epsilon)}{(i(t+1)-\epsilon)^2}\right)\right) = 0.$$

Die Argumentfunktion wählen wir wie in i). Das eingeführte ϵ kann aus dem Nenner weg gelassen werden, sobald wir den Limes bilden, da dieser Nenner für alle $t\in[1,R]$ endlich ist und keine Auswirkungen bezüglich des Branch-Cuts hat. So schreiben wir nun

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\frac{\log(x-i)}{(x+i)^2} &= -i\lim_{R\to+\infty}\lim_{\epsilon\to0}\left(\int_{+R}^{1}\mathrm{d}t\frac{\log(i(t-1)+\epsilon)}{(i(t+1)+\epsilon)^2} + \int_1^{+R}\mathrm{d}t\frac{\log(i(t-1)-\epsilon)}{(i(t+1)-\epsilon)^2}\right) \\
&= i\lim_{R\to+\infty}\int_1^{+R}\mathrm{d}t\,\lim_{\epsilon\to0}\left[\frac{\log(i(t-1)+\epsilon)}{-(t+1)^2} - \frac{\log(i(t-1)-\epsilon)}{-(t+1)^2}\right]
\end{aligned}$$

Durch explizites Einsetzen des komplexen Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned}
&= i\int_1^{+\infty}\mathrm{d}t\,\lim_{\epsilon\to0}\left[\frac{\log(\sqrt{(t-1)^2+\epsilon^2}) + i\mathrm{Arg}(i(t-1)+\epsilon) - \log(\sqrt{(t-1)^2+\epsilon^2}) + i\mathrm{Arg}(i(t-1)-\epsilon)}{-(t+1)^2}\right] \\
&= i\int_1^{+\infty}\mathrm{d}t\,\lim_{\epsilon\to0}\frac{i[\mathrm{Arg}(i(t-1)+\epsilon) - \mathrm{Arg}(i(t-1)-\epsilon)]}{-(t+1)^2} \\
&= \int_1^{+\infty}\mathrm{d}t\,\frac{\left[\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right]}{(t+1)^2} = -\left.\frac{2\pi}{(t+1)}\right|_1^{+\infty} = \pi,
\end{aligned}$$

da sich die Realteile des Logarithmus wegheben.

2 Hausübungen:

2.1 Berechnung von Reihen durch Kontourintegrale

Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Funktionen $\phi(iz) = \frac{1}{e^{iz}-1}$, sowie eine beliebige Funktion $f(z)$ die auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph ist.

i) Bestimmen Sie die Singularitäten z_n der Funktion $\phi(iz)f(z)$

ii) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion $\text{res}_{z_n}(\phi(iz)f(z))$ für alle singulären Punkte $z_n \neq 0$

iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und ii) um die Summe der reziproken Quadratzahlen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als komplexes Kontourintegral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi i} \oint_{\gamma_L+\gamma_R} \phi(iz)f(z)$$

entlang der in Abb.2 dargestellten Kontouren γ_L und γ_R darzustellen, und bestimmen Sie die Funktion $f(z)$.

iv) Verwenden Sie die Darstellung aus iii) um $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ durch die Abb. 2 dargestellte Vervollstndigung der Integrationskontour explizit zu bestimmen.

Zu i): Die zu betrachtende Funktion kann sich als

$$f(z)\phi(iz) = \frac{f(z)}{e^{iz}-1}$$

schreiben. Betrachten wir erstmal den Nenner. Dieser ist Null, wenn $z = 2\pi n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist. Für $n \neq 0$ sind dies alle Pole erster Ordnung, da

$$\lim_{z\to 2\pi n} \frac{(z-2\pi n)f(z)}{e^{iz}-1} = \lim_{z\to 2\pi n} \frac{f(z)+(z-2\pi n)f'(z)}{ie^{iz}} = \frac{f(2\pi n)}{i}.$$

Für $z = 0$ hat $\phi(iz)$ einen Pol erster Ordnung und über $f(z)$ können wir keine Aussage machen, außer, dass die Funktion dort nicht holomorph ist. Von daher ist dort eine Singularität, wobei wir nicht wissen, ob es ein Pol endlicher Ordnung oder eine wesentliche Singularität ist.

Zu ii): Im Abschnitt gerade eben haben wir schon über die Grenzwertbildung gezeigt, dass es sich um Pole erster Ordnung handelt. Der Grenzwert entspricht dem Residuum

$$\text{Res}_{z=2\pi n}\phi(iz)f(z) = -if(2\pi n).$$

Für $z = 0$ können wir aufgrund der Unbekanntheit von f keine Aussage treffen.

Zu iii): Betrachten wir das Integral, so umrundet die Kurve $\gamma_L+\gamma_R$ alle Pole mit $n \neq 0$ in negativer Orientierung. Damit haben wir nach dem Residuensatz

$$\frac{1}{4\pi i}\oint_{\gamma_L+\gamma_R} \frac{f(z)}{e^{iz}-1} = \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(2\pi n)}{i} - \sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{f(2\pi n)}{i}\right) = \frac{i}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f(2\pi n) + \sum_{n=-1}^{-\infty} f(2\pi n)\right).$$

Um dies gleich der Summe der umgekehrten Quadrate zu schreiben, muss f symmetrisch sein und wir haben

$$if(2\pi n) = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow f(2\pi n) = \frac{1}{in^2} = \frac{(2\pi)^2}{i(2\pi n)^2},$$

womit wir $f(z) = \frac{(2\pi)^2}{iz^2}$ schreiben können.

Zu iv): Durch erweitern der Kontour $\gamma_L + \gamma_R$ mit den Bögen α und $\tilde{\alpha}$ erhält man eine Kontour, welche die Singularität bei $z = 0$ einmal in positiver Richtung umrundet. Damit wir dies gleich unserem ursprünglichen Integral setzen können, müssen wieder die Integrale über die Bögen verschwinden. Den Bogen α parametrisieren wir mit $z(\varphi) = Re^{i\varphi}$ und $\varphi \in [\arcsin(1/R), \pi - \arcsin(1/R)]$. Damit vermeiden wir die Singularitäten auf der reellen Achse und nähern uns für $R \to \infty$ trotzdem dem Bogen:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty}\left|\int_\alpha \mathrm{d}z\phi(iz)f(z)\right| &= \lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \frac{iRe^{i\varphi}(2\pi)^2}{iR^2e^{2i\varphi}(e^{iRe^{i\varphi}}-1)}\right| \\
&\leq \lim_{R\to+\infty}\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \left|\frac{(2\pi)^2}{R(e^{iRe^{i\varphi}}-1)}\right| \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \frac{(2\pi)^2}{R|e^{iR(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}-1|} \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \frac{(2\pi)^2}{R|e^{-R\sin(\varphi)}(\cos(R\cos(\varphi))+i\sin(R\cos(\varphi)))-1|} \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \frac{(2\pi)^2}{R\sqrt{(e^{-R\sin(\varphi)}\cos(R\cos(\varphi))-1)^2+e^{-2R\sin(\varphi)}\sin^2(R\cos(\varphi))}} \\
&= \lim_{R\to+\infty}\frac{(2\pi)^2}{R}\int_{\arcsin(1/R)}^{\pi-\arcsin(1/R)} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2R\sin(\varphi)}-2\cos(R\cos(\varphi))e^{-R\sin(\varphi)}}} \\
&\leq \lim_{R\to+\infty}\frac{(2\pi)^2}{R}\pi\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2}-2\cos(R\cos(\arcsin(1/R)))e^{-1}}} \\
&= (2\pi)^2\pi\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+e^{-2}-2\cos(\sqrt{R^2-1})e^{-1}}}
\end{aligned}$$

Der zweite Nenner geht nur für $R = 0$ gegen Null und hat sonst für $R > 1$ das Minimum $\sqrt{1 + e^{-2} - 2e^{-1}}$ und ist damit beschränkt. Damit geht der letzte Limes gegen Null. Analog lässt sich das Integral über den Bogen $\tilde{\alpha}$ abschätzen.

Die umrundete Singularität ist für die Funktion $\phi(iz)$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum

$$\lim_{z\to0}\frac{z}{e^{iz}-1} = \lim_{z\to0}\frac{1}{ie^{iz}} = \frac{1}{i}.$$

Damit lässt sich um $z = 0$ die Funktion als Laurentreihe

$$\phi(iz) = \frac{1}{iz} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

schreiben. Das Residuum bei $z = 0$ von $f(z)\phi(iz)$ kann man nun von

$$f(z)\phi(iz) = \frac{(2\pi)^2}{iz^2}\left(\frac{1}{iz} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = -\frac{(2\pi)^2}{z^3} + \frac{b_0(2\pi)^2}{iz^2} + \frac{b_1(2\pi)^2}{iz} + O(1)$$

ablesen. Dafür entwickeln wir $\phi(iz)$ bis b_1 mithilfe von Cauchy's Produktformel, indem wir verwenden, dass wir die Reihe des Nenners $e^{iz} - 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(iz)^k}{k!}$ kennen und die Multiplikation dieser mit der

Funktion entsprechend Eins ergeben muss:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^{iz}-1}{e^{iz}-1} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(iz)^k}{k!}\right)\left(\frac{1}{iz}+\sum_{n=0}^{+\infty}b_n z^n\right) \\ &= \left(1+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(iz)^{k-1}}{k!}+\left(ib_0 z+(-\frac{b_0}{2}+ib_1)z^2+\cdots\right)\right) \\ &= 1+(b_0+\frac{1}{2})(iz)+(-\frac{1}{3!}-\frac{b_0}{2}+ib_1)z^2+\cdots \end{aligned}$$

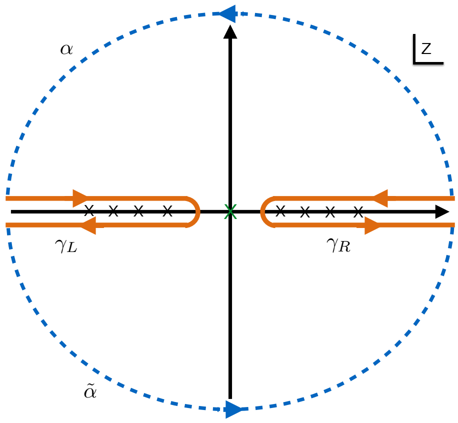
Durch Koeffizientenvergleich finden wir, dass $b_0 = -1/2$ ist und entsprechend, dass $b_1 = \frac{i}{12}$ sein muss. Damit können wir das Residuum

$$\mathrm{Res}_{z=0} f(z)\phi(iz) = \frac{b_1(2\pi)^2}{i} = \frac{\pi^2}{3}$$

bestimmen. Damit ist das Integral und damit die Summe der umgekehrten Quadrate

$$\frac{1}{4\pi i}\oint_{\gamma_L+\gamma_R}\frac{f(z)}{e^{iz}-1} = \frac{1}{2}\mathrm{Res}_{z=0}\frac{f(z)}{e^{iz}-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Fig. 3:



2.2 Sattelpunktsnäherung

Berechnen Sie basierend auf der Integraldarstellung

$$K_\nu(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dw}{w} w^\nu \exp\left(-\frac{s}{2}(w+1/w)\right)$$

die asymptotische Entwicklung der modifizierten Bessel Funktion $K_\nu(z)$ für $s\to\infty$ bei festem ν.

Wir betrachten den Exponenten in der Integraldarstellung von $K_\nu(s)$ und entwickeln ihn bis zur zweiten Ordnung, wobei wir schauen, ob Sattelpunkte in der Nähe oder entlang des Integrationsweges liegen:

$$K_\nu(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}w}{w} w^\nu \exp\left(sf(w)\right), \quad f(w) = -\frac{1}{2}\left(w+1/w\right).$$

Nun ist

$$f'(w) = -\frac{1}{2}\left(1 - 1/w^2\right) \quad \text{und} \quad f''(w) = -1/w^3.$$

Da mit haben wir als Sattelpunkte $w = \pm 1$. Nun liegt $w = +1$ entlang von $[0, +\infty)$ und der Steepest-Descent Pfad entlang der reellen Achse. Damit ist

$$e^{i\alpha} = ie^{-\frac{i}{2}\operatorname{Arg}(f''(1))} = ie^{-\frac{i}{2}\operatorname{Arg}(-1)} = ie^{-\frac{i}{2}\pi} = i(-i) = 1.$$

Damit erhalten wir über die Sattelpunktsnäherung

$$K_\nu(s) \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{s|f''(1)|}}\,\frac{w^\nu}{w}\bigg|_{w=1} e^{f(1)s} = \sqrt{\frac{\pi}{2s}}e^{-s}.$$