Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 7:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Bestimmung von Residuen

Bestimmen Sie die Pole und Residuen der folgenden Funktionen

i) $f(z) = \frac{h(z)}{e^z - 2}$ mit $h(z)$ holomorph

Zunächst schauen wir den Nenner an und bemerken, dass dieser Nullstellen hat, wenn

$$e^z - 2 = 0 \Leftrightarrow e^z = 2 \Leftrightarrow z = \log(2) = \log(|2|) + i2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

Jetzt muss man eine Fallunterscheidung machen. Sollte eine Nullstelle von $h(z)$ mit einer Nullstelle von $e^z - 2$ zusammenfällt, so sollte man überprüfen, ob der Grenzwert existiert. Sei z_0 eben jene Nullstelle.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{g(z)} \overset{l'Hopital}{=} \lim_{z \to z_0} \frac{h'(z)}{e^z} = \frac{h'(z_0)}{2}$$

Da h(z) holomorph ist existiert diese Ableitung auch und damit der Limes. Es handelt sich dabei also eine hebbare Nullstelle. Natürlich können auch mehrere Nullstellen zusammenfallen und diese wären dann alle hebbar. Man kann als Beispiel dafür $h(z) = e^z - 2$ betrachten.
Haben wir den Fall der hebbaren Nullstellen ausgeschloßen, so kann man erkennen, dass es sich um eine Nullstelle erster Ordnung handelt. Da h(z) holomorph ist und $e^z - 2$ ebenfalls, kann man das Residuum durch die entsprechende Formel berechnen.

$$\text{Res}_{\log(|2|)+i2\pi k}(f) = \frac{h(\log(|2|) + i2\pi k)}{(e^{\log(|2|)+i2\pi k} - 2)'} = \frac{h(\log(|2|) + i2\pi k)}{2}$$

Diese Formel ist ein direktes Resultat aus dem Limes-Kriterium, L'Hopital und der Holomorphie der Funktionen. Hielte es sich um eine Polstelle höherer Ordnung, so müssten wir die entsprechende Regel für Pole n-ter Ordnung (siehe Vorlesung) verwenden oder die Funktion in eine Laurent-Reihe entwickeln.

ii) $f(z) = \frac{z^4}{(z^2-2z+1)(z+1)}$ Für diese Aufgabe kann man die Partialbruchzerlegung verwenden. Aber zunächst schreiben wir f(z) um, sodass wir die Ordnung der Polstellen direkt ablesen können.

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-1)^2(z+1)}$$

, womit wir eine Polstelle bei $z = 1$ der Ordnung 2 hätten und eine bei $z = -1$ der ersten Ordnung. Somit können wir die Partialbruchzerlegung, wie sie in der Vorlesung eingeführt, durchführen.

$$f(z) = p_0(z) + \frac{p_1(z-1)}{(z-1)^2} + \frac{p_2(z+1)}{((z+1))}$$

Der Grad der Polynome ist für den Ansatz $\text{Grad}(p_j) = n_j - 1$. Dabei ist n_j die Ordnung der Polstelle vom Entwicklungspunkt. Der Grad der Polynome kann auch geringer sein, wenn sich herausstellen sollte, dass die entsprechenden Koeffizienten 0 ergeben (insbesondere müsste dann $a_{n_j-1} = 0$). Der Grad von p_0 ergibt sich aus dem Grad des Zähler minus dem des Nenners ($\text{Grad}(p_0) = \text{Grad}(P) - \text{Grad}(Q) = 4 - 3 = 1$).

$$\begin{aligned}\frac{z^4}{(z-1)^2(z+1)} = f(z) &= \sum_{n=0}^{1} a_n z^n + \frac{\sum_{i=0}^{1} b_i(z-1)^i}{(z-1)^2} + \frac{\sum_{k=0}^{0} c_k(z+1)^k}{(z+1)} \\ &= a_0 + a_1 z + \frac{b_0}{(z-1)^2} + \frac{b_1}{(z-1)} + \frac{c_0}{(z+1)}\end{aligned}$$

Nun können wir beide Seiten mit dem Nenner der LHS(linken Seite) multiplizieren um eine Gleichung zu bekommen, bei der wir einen Koeffizientenvergleich durchzuführen können. Wenn man diese schon nach Potenzen von z sortiert, erhält man.

$$z^4 = a_1 z^4 + z^3(a_0 - a_1) + z^2(b_1 + c_0 - a_0 - a_1) + z(b_0 + a_1 - a_0 - 2c_0) + (b_0 + c_0 + a_0 - b_1)$$

Da diese Gleichung für alle z erfüllt ist, müssen die Terme in den Klammern 0 ergeben. Außerdem sieht man sofort, dass $a_1 = 1$ sein muss. Damit und mit der Klammer bei z^3 ergibt sich ebenso $a_0 = a_1 = 1$.
Man arbeitet sich jetzt nach unten und setzt ein, was man bisher weiß, um neue Gleichungen für die restlichen Koeffizienten zu bekommen.

$$\begin{aligned} z^2 &\to b_1 = 2 - c_0 \\ z^1 &\to b_0 = 2c_0 \\ z^0 &\to c_0 = 1/4 \end{aligned}$$

Einsetzen in die anderen Gleichungen liefert dann also $b_0 = 1/2$ und $b_1 = 7/4$. Somit ergibt sich schließlich

$$f(z) = 1 + z + \frac{7}{4(z-1)} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{4(z+1)}$$

Die Residuen sind die Koeffizienten der Terme, wie man sie aus der entsprechenden Laurent-Reihe kennt. Also $\text{Res}_1(f) = 7/4$ und $\text{Res}_{-1}(f) = 1/4$.

iii) $f(z) = \frac{\sin(mz)}{z^n} \qquad n \in \mathbb{N}$

Für diese Aufgabe kann man wieder die Reihendarstellung des Sinus verwenden.

$$f(z) = \frac{1}{z^n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(mz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k m^{2k+1}\frac{z^{2k+1-n}}{(2k+1)!}$$

Wenn wir den Term k=0 betrachten, so sehen wir, dass es sich um eine Nullstelle der Ordnung n-1 handelt. Um das Residuum zu bestimmen müssen wir nun den Term der Laurent-Reihe betrachten mit z^{-1}. Es muss also gelten $2k+1-n=-1 \Leftrightarrow k=\frac{n}{2}-1$. Dabei ist zu beachten, dass es sich um eine ganze Zahl handeln muss. Ist dies nicht der Fall, ist das Residuum $\mathrm{Res}_0(f)=0$ und ansonsten

$$\mathrm{Res}_0(f)=\begin{cases} 0 & \text{, n ungerade} \\ \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}} m^{n-1}}{(n-1)!} & \text{, n gerade} \end{cases}$$

Das liegt daran, dass die Sinus-Reihe nur ungerade Potenzen enthält. Gibt es nun eine ungerade Verschiebung in der Potenz, sind alle Potenzen gerade.

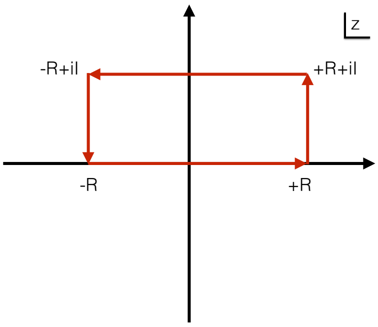
1.2 Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

Berechnen Sie das reelle Integral

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{e^{ax}}{1+e^x}\ ,\qquad 0<a<1\ .$

indem Sie es durch eine geeignete Wahl der Konstante I mit dem in Abb. 1 dargestellten komplexen Kontourintegral in Verbindung bringen.

Fig. 1



Beginnen wir zunächst damit den Weg allgemein zu parametrisieren. Nennen wir die Wege γ_i und fangen bei der Benennung mit dem Weg entlang der reellen Achse an und zählen in mathematisch positiver Richtung durch. Für die Parametrisierung der Wege wählen wir

$$\begin{aligned}
&\gamma_1(t)=t && t\in[-R,R]\\
&\gamma_2(t)=R+iIt && t\in[0,1]\\
&\gamma_3(t)=t+iI && t\in[R,-R]\\
&\gamma_4(t)=-iIt+iI-R && t\in[0,1]
\end{aligned}$$

Dabei sei jeweils $t\in[0,1]$. Betrachten wir nun zunächst die beiden Integrale $\gamma_2(t)$ und$\gamma_4(t)$ und machen eine Abschätzung um danach zu zeigen, dass diese im $\lim_{R\to\infty}$ nicht beitragen.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} dx\frac{e^{ax}}{1+e^x} &= \int_0^1 dt\ iI\frac{e^{a(R+iIt)}}{1+e^{R+iIt}} \leq \left|iI\int_0^1 dt\frac{e^{a(R+iIt)}}{1+e^{R+iIt}}\right| \leq |I|\int_0^1 dt\left|\frac{e^{a(R+iIt)}}{1+e^{R+iIt}}\right| \\
&\leq |I|\int_0^1 dt\frac{\left|e^{aR}\right|}{\left|1+e^{R+iIt}\right|} \leq |I|\int_0^1 dt\frac{\left|e^{aR}\right|}{\left||1|-\left|e^R\right|\left|e^{iIt}\right|\right|} = |I|\left[\frac{\left|e^{aR}\right|}{\left||1|-\left|e^R\right|\right|}t\right]_0^1 = |I|\frac{\left|e^{aR}\right|}{\left||1|-\left|e^R\right|\right|}
\end{aligned}$$

Analog erhält man.

$$\int_{\gamma_4} dx \frac{e^{ax}}{1+e^x} \leq |I| \frac{\left|e^{-aR}\right|}{||1| - |e^{-R}||}$$

Und nun können wir die Limiten bilden.

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} dx \frac{e^{ax}}{1+e^x} \leq \lim_{R\to\infty} |I| \frac{\left|e^{aR}\right|}{||1| - |e^{R}||} \overset{\text{großes R}}{\approx} \lim_{R\to\infty} |I| \frac{\left|e^{aR}\right|}{|e^R|} \overset{a,R\in\mathbb{R}}{=} \lim_{R\to\infty} |I| e^{(a-1)R} \overset{a-R<0}{=} 0$$
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} dx \frac{e^{ax}}{1+e^x} \leq \lim_{R\to\infty} |I| \frac{\left|e^{-aR}\right|}{||1| - |e^{-R}||} \overset{\text{großes R}}{\approx} \lim_{R\to\infty} |I| \frac{\left|e^{-aR}\right|}{1} = 0$$

Damit fallen diese beiden Wege im Limes weg.

Berechnen wir nun $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$.

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \int_{-R}^{R} dt \frac{e^{at}}{1+e^t}$$
$$\int_{\gamma_3} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \int_{R}^{-R} dt \frac{e^{a(t+iI)}}{1+e^{t+iI}} = e^{iaI} \int_{R}^{-R} dt \frac{e^{at}}{1+e^{t+iI}}$$

An dieser Stelle bemerken wir, dass die beiden Integrale bis auf Vorfaktor und Vorzeichen die Gleichen sind, wenn $I = 2\pi + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wählen wir nun $I = 2\pi$, was das einfachste ist und im Übrigen nur eine Polstelle erster Ordnung einschließt, die bei $x = i\pi$ liegt. So erhalten wir für das komplette Integral $\int_\gamma \frac{e^{ax}}{1+e^x}$ zwei Gleichungen, die wir verbinden können.

$$\int_\gamma ... = \int_{\gamma_1} ... + \int_{\gamma_2} ... + \int_{\gamma_3} ... + \int_{\gamma_4} ... \overset{\lim_{R\to\infty}}{=} (1 - e^{i2a\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = 2\pi i \mathrm{Res}_{i\pi}$$
$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{2\pi i \mathrm{Res}_{i\pi}}{1 - e^{i2a\pi}}$$

Für die Berechnung des Residuums können wir wieder die Formel für zwei holomorphe Funktionen und Polstelle erster Ordnung verwenden und erhalten dann folgendes Residuum.

$$\mathrm{Res}_{i\pi}(f) = \frac{e^{ia\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ia\pi}$$

Und damit Schlussendlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{-e^{ia\pi} 2\pi i}{-e^{ia\pi}(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi})} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$$

2 Hausübungen:

2.1 Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

Bestimmen Sie die reellen Integral

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{1}{1+x^4}$

Wählen wir als Integrationskontur das Integral an sich (γ_1) und einen Halbkreis (γ_2), der von der positiven reellen Achse zur negativen läuft (siehe Abbildung 2). Dieser Halbkreis kann analog zur Vorlesung abgeschätzt werden (siehe $\frac{1}{1+z^3}$), sodass das komplexe Kontourintegral gleich dem reellen entspricht. Jetzt können wir einfach die Residuen der Funktion in der oberen Halbebene berechnen um den Wert des Integrals zu bekommen.

$$\int_\gamma dx \ \frac{1}{1+x^4} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{1}{1+x^4} = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} v_j(b_j)\mathrm{Res}_{b_j}$$

Die Funktion hat Polstellen, wenn $x^4 = -1$ und damit $b_k = e^{-3/4\pi + k/2\pi}$ mit $k = 0, 1, 2, 3$. Hierbei sei bemerkt, dass die Nullstellen nicht nach Zweigen durchnummeriert ist (d.h. k=0 ist hier nicht der Hauptzweig). Von diesen Polstellen liegen nur die letzten beiden in der oberen Halbebene. Da sowohl 1 als auch $1 + z^4$ holomorph sind und es sich um Polstellen erster Ordnung handelt, können wir die Residuen wieder entsprechend berechnen.

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{z_0}(f) &= \frac{1}{4z_0^3} \\ \mathrm{Res}_{e^{i\pi/4}}(f) &= \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \\ \mathrm{Res}_{e^{i3/4\pi}}(f) &= \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Und somit insgesamt

$$\int_\gamma dx \ \frac{1}{1+x^4} = 2\pi i \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

ii) $\int_{0}^{\infty} dx \ \frac{1}{1+x^5}$

Wir wählen die Kontur analog zur Vorlesung (wie es bei $\frac{1}{1+z^3}$ gemacht wurde, siehe auch Abb.2). Der Kreisrand des Kreisauschnittes $\gamma_2(t)$ kann ebenso analog abgeschätzt werden. Für die Kontur, die wieder zum Ursprung zurückführt $\gamma_3(t)$ müssen wir jetzt wieder das richtige φ wählen, sodass wir zwei gleiche Integrale bekommen. Schauen wir uns dazu die Parametrisierung des Weges γ_3 an.

$$\gamma_3(t) = te^{i\varphi_{\max}} \quad t \in [R, 0]$$

Wobei $\varphi_{\max}$ geschickt gewählt werden sollte. Wenn wir nun den Weg über dieses Integral berechnen erhalten wir.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} dx \frac{1}{1+x^5} &= \int_R^0 dt e^{i\varphi_{\max}} \frac{1}{1+t^5 e^{i5\varphi_{\max}}} \\ &= -e^{i\varphi_{\max}} \int_0^R dt \frac{1}{1+t^5 e^{i5\varphi_{\max}}}\end{aligned}$$

Wenn nun $e^{i5\varphi_{\max}} = 1$ bekommt man abgesehen vom Vorfaktor wieder das zu berechnenden Integral heraus. Dann kann man das Integral über die Residuen berechnen, da das geschlossene ja wieder durch die Residuen bestimmt ist. Um möglichst wenig Residuen berechnen zu müssen, wählen wir $\varphi_{\max} = \frac{2\pi}{5}$. Somit ist nur eine (einfache) Polstelle in der Kontur enthalten. Das Integral über die geschlossene Kontur ist nun gegeben durch die einzelnen Wegintegrale, wobei γ_2 im Limes wegfällt. Zusätzlich ist das gesamte Integral auch durch den Residuensatz berechenbar.

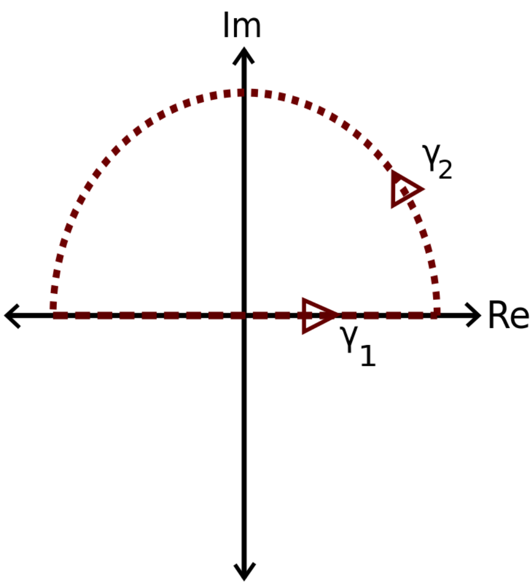
$$\oint_\gamma \frac{1}{1+x^5} = \int_{\gamma_1} .. + \int_{\gamma_2} ... + \int_{\gamma_3} ... = (1 - e^{i\frac{2\pi}{5}}) \int_0^\infty dx\ \frac{1}{1+x^5} = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} v_j(b_j) \mathrm{Res}_{b_j}(f)$$

Nun gilt es zu schauen wo die Polstellen liegen und die relevanten Residuen zu berechnen. Damit eine Polstelle muss $z^5 = -1$ erfüllt sein. Die Nullstellen können wir wieder durch $b_k = e^{-i\pi + k2/5\pi}$ darstellen. Damit liegt nur $b_3 = e^{i\pi/5}$ in der Kontur. Da sowohl 1 als auch $1 + z^5$ holomorph sind und es sich um eine einfache Nullstelle handelt, kann das Residuum wieder entsprechend berechnet werden.

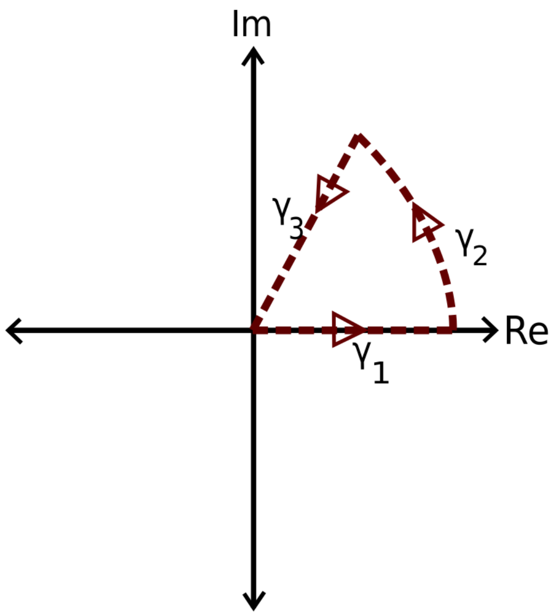
$$\mathrm{Res}_{e^{i\pi/5}}(f) = \frac{1}{5(e^{i\pi/5})^4} = \frac{e^{-4/5\pi}}{5}$$

Und damit insgesamt

$$\int_0^\infty dx\ \frac{1}{1+x^5} = \frac{2\pi i}{5} \frac{e^{-4/5\pi}}{(1 - e^{i\frac{2\pi}{5}})} = \frac{\pi}{5} \frac{e^{-i\pi}}{\sin(-\pi/5)} = \frac{\pi}{5\sin(\pi/5)}$$



(a) Pfad zur Aufgabenteil i)



(b) Pfad zur Aufgabenteil ii)

Fig. 2: Pfade zur Aufgabe 2.1

2.2 Argumentprinzip

Betrachten Sie die Funktion $f(z)$ die bis auf endlich viele isolierte Singularitäten in $\{b_i, \cdots, b_j\}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U holomoroph ist.

i) Bestimmen Sie das Residuum von $\mathrm{res}_{z_0}(f'(z)/f(z))$ wenn $f(z)$ in $z = z_0$ eine Nullstelle k-ter Ordnung hat

[Hinweis: Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung von $f(z)$]

Entwickeln wir $f(z) = \sum_{n=0} a_n(z_n - z_0)^n$ als Potenzreihe in der Umgebung von der Nullstelle. Diese konvergiert absolut in einer gewissen Umgebung. Handelt es sich jetzt um eine Nullstelle k-ter Ordnung, wissen wir außerdem, dass $a_n = 0 \ \ \forall n < k$ und wir können die Funktion schreiben als $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$, wobei $g(z) \neq 0$, da es sich sonst um eine Nullstelle höherer Ordnung handeln würde. Die Ableitung kann man dann mit der Produktregel bestimmen.

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + g'(z)(z - z_0)^k$$

Damit ergibt sich

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Berechnen wir nun das Residuum an der Nullstelle, so bemerken wir, dass die Funktion $g'(z)/g(z)$ keine Singularität hat und der erste Teil schon in der entsprechenden Form dasteht.

$$\mathrm{res}_{z_0}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = k$$

ii) Bestimmen Sie das Residuum von $\mathrm{res}_{z_p}(f'(z)/f(z))$ wenn $f(z)$ in $z = z_p$ einen Pol m-ter Ordnung hat

[Hinweis: Verwenden Sie die Laurentreihendarstellung von $f(z)$]

Hier können wir ähnlich vorgehen. Allerdings müssen wir die Funktion als Laurent-Reihe darstellen, da ein Pol vorliegt. Damit gilt $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z_n - z_0)^n$, wobei jedoch $a_n = 0 \ \forall n < -m$, da es sich sonst um ein Pol höherer Ordnung handeln würde. Somit lässt sich f(z) hier durch $f(z) = (z - z_p)^{-m} h(z)$ darstellen, wobei m die Ordnung des Pols ist und $h(z) \neq 0$. Damit ergibt sich analog

$$f'(z) = -m(z - z_p)^{-m-1} h(z) + h'(z)(z - z_p)^{-m}$$

und ebenso analog

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{(z - z_p)} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Dementsprechend ergibt sich für das Residuum an einer Polstelle von f(z)

$$\mathrm{res}_{z_p}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -m$$

iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und ii) um folgende Aussage zu beweisen, die als Arguments-prinzip bezeichnet wird

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = Z - P$$

wobei Z die Anzahl der Nullstellen (inklusive ihrere Multiplizitäten) und P die Anzahl der Pole (inklusive ihrere Multiplizitäten) bezeichnet, die von der Kurve γ eingeschlossen werden.

Hier können wir einfach den Residuensatz anwenden und die Ergebnisse aus i) und ii) verwenden.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2\pi i}{2\pi i}\sum_n Res_{b_n}(f)$$

Hier müssen wir nun unterscheiden, ob es sich um eine Polstelle aufgrund einer Nullstelle oder Singularität von $f(z)$ handelt. Damit erhalten wir dann das Ergebnis.

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_i k_i + \sum_j (-m_j) = Z - P$$