Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 6:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Umlaufzahlen

Bestimmen Sie die Umlaufzahlen der Kurven γ_1 und γ_2 bezueglich der Punkte z_1, z_2 und z_3 in Abb. 1.

Allgemein ist die Umlaufzahl einer Kurve γ um einen Punkt z_0 definiert als

$$\nu_\gamma(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}.$$

Da die konstante Funktion 1 überall holomorph ist, können die Kurven jeweils zu Kreisen um die entsprechenden Punkte zusammengezogen können und wir erhalten über Cauchy's Integralformel eine ganze Zahl, welche aussagt wie oft und in welcher Orientierung der jeweilige Punkt umrundet wurde. So erhalten wir

$$\nu_{\gamma_1}(z_1) = 1, \;\; \nu_{\gamma_1}(z_2) = 2, \;\; \nu_{\gamma_1}(z_3) = 0, \;\; \nu_{\gamma_2}(z_1) = 0, \;\; \nu_{\gamma_2}(z_2) = -1, \;\; \nu_{\gamma_2}(z_3) = -1.$$

1.2 Entwicklung in Laurentreihen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$

i) Entwickeln Sie die Funktion in eine Laurentreihe um den Punkt $z_0 = 1$ und geben Sie deren Konvergenzbereich an.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes und der Darstellung als Laurentreihe das komplexe Kontourintegral entlang der in Abb. 2 dargestellten Kontour.

Um die Funktion f um $z_0 = 1$ als Laurentreihe

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

zu entwickeln, können wir die Cauchy-Formel für die Koeffizienten benutzen und erhalten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{1/z}{(z-1)^{n+3}}.$$

Für $n \leq (-3)$, ist dieser Integrand im Bereich des Kreises $K_\epsilon(1)$ holomorph und die Koeffizienten sind Null. Für $n = (-2)$ erhalten wir Cauchy's Integralformel und bekommen $a_{-2} = 1/z|_{(z=1)} = 1$. Für $n \geq (-1)$ können wir die Cauchy Integralformel für Ableitungen benutzen und erhalten

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{1/z}{(z-1)^{n+3}} = \frac{1}{(n+2)!} \left. \frac{\mathrm{d}^{n+2} 1/z}{\mathrm{d}z^{n+2}} \right|_{z=1} = \frac{(-1)^{n+2}(n+2)!}{(n+2)!} = (-1)^n.$$

Da wir nur endlich viele Koeffizienten für negative n haben, welche nicht Null sind, und die übrigen Koeffizienten Betrag 1 haben, erhalten wir zum Beispiel mit dem Quotientenkriterium den Konvergenzradius des Nebenteils $|z-1| < 1$. Der Hauptteil schließt den Punkt 1 in der Mitte aus. Damit ist der Konvergenzbereich $K_1(1) \backslash \{1\}$.
Eine Alternative die Reihe zu erhalten, ist aus dem $1/z$ eine geometrische Reihe in $(1-z)$ zu konstruieren

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{(z-1)^2} \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

Hier ist der Schritt mit der geometrischen Reihe nur machbar, wenn $|z-1| < 1$, womit man den Konvergenzbereich direkt mit bekommt.

Um nun das Integral entlang von γ zu berechnen, bemerken wir, dass diese Kurve die zweite Singularität bei $z = 0$ mit einschließt. Um das Residuum an diesem Pol zu berechnen, entwickeln wir diesen auch in eine Laurentreihe mithilfe des Tricks mit der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z} \frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^{n-1}$$

und erhalten als Residuum $\mathrm{Res}_0 f = a_{-1} = 1$. Für den anderen Pol $z = 1$ erhalten wir durch die Laurentreihe aus i) das Residuum $\mathrm{Res}_1 f = -1$. Betrachten wir nun γ, so wird $z = 0$ einmal in positiver Richtung und $z = 1$ einmal in negativer Richtung umrundet und wir haben nach dem Residuensatz

$$\oint_\gamma \mathrm{d}z\ f(z) = 2\pi i (\nu_\gamma(0) \mathrm{Res}_0 f + \nu_\gamma(1) \mathrm{Res}_1 f) = 2\pi i (1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)) = 4\pi i.$$

Fig. 1:

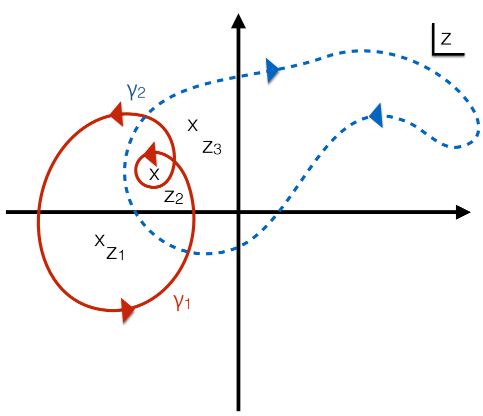
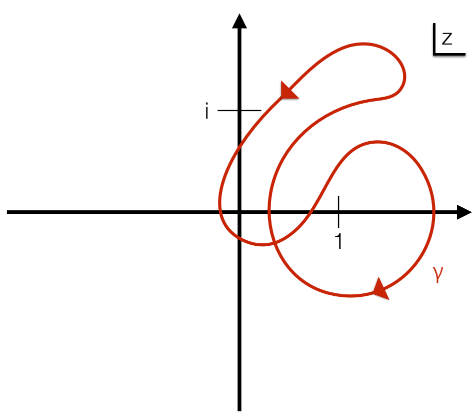


Fig. 2:



2 Hausübungen:

2.1 Kontourintegrale

Berechnen Sie für $R > 0$ mit $R \neq 1$ die komplexen Kontourintegrale

i) $\oint_{\partial K_R(0)} \frac{1}{z^2-1} dz$

ii) $\oint_{\partial K_R(0)} \frac{1}{z^2+z} dz$

Den Integranden aus i) nennen wir erstmal $f(z)$ und den aus ii) $g(z)$ und schreiben beide entsprechend als

$$f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)} \quad \text{und} \quad g(z) = \frac{1}{z^2+z} = \frac{1}{z(z+1)}.$$

Erstmal ist erkennbar, dass f zwei Pole bei $z = \pm 1$ und g bei $z = 0, -1$ hat. Die Residuen für f sind

$$\mathrm{Res}_{(-1)} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(-1)} \mathrm{d}z \frac{1/(z-1)}{z+1} = \frac{1}{z-1}\bigg|_{z=-1} = -1/2,$$

und

$$\mathrm{Res}_1 f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{1/(z+1)}{z-1} = \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1} = 1/2.$$

Für g sind sie

$$\mathrm{Res}_0 g = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(0)} \mathrm{d}z \frac{1/(z+1)}{z} = \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=0} = 1, \quad \mathrm{Res}_{(-1)} g = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(-1)} \mathrm{d}z \frac{1/z}{z+1} = \frac{1}{z}\bigg|_{z=-1} = -1.$$

Ist nun $R < 1$, so ist f in dem Kreis holomorph und das Integral Null. Bei g erhalten wir mit einfacher Umlaufzahl das Residuum bei $z = 0$

$$\oint_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}z\ f(z) = 0, \quad \oint_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}z\ g(z) = 2\pi i \mathrm{Res}_0 g = 2\pi i, \quad R < 1.$$

Ist nun $R > 1$, so werden jeweils beide Pole mit eingeschlossen und einmal positiv umrundet. Entsprechend erhalten wir über den Residuensatz

$$\oint_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}z\ f(z) = 2\pi i(\mathrm{Res}_{(-1)} f + \mathrm{Res}_1 f) = 2\pi i(-1/2 + 1/2) = 0$$

und für g

$$\oint_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}z\ g(z) = 2\pi i(\mathrm{Res}_0 g + \mathrm{Res}_{(-1)} g) = 2\pi i(1 + (-1)) = 0.$$

2.2 Partialbruchzerlegung

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$, von der Sie ohne Beweis annehmen koennen dass Sie sich in einer Partialbruchzerlegung als $f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}$ darstellen lässt

i) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c in der Partialbruchzerlegung von $f(z)$

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuensatzes und der Partialbruchzerlegung aus (i), die komplexen Kontourintegral entlang der in Abb. 3 dargestellten Kontouren.

Zu i): Wir nehmen an, dass
$$\frac{1}{z(z-1)^2} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}.$$
Diese Gleichung multiplizieren wir mit $z(z-1)^2$ und sortieren diese nach Potenzen von z

$$1 = a + z(-2a - b + c) + z^2(a + b).$$

Da diese Gleichung für beliebige z (außer den Polen $z = 0, 1$) gelten soll, können wir einen Koeffizientenvergleich machen und erhalten

$$a = 1, \quad -2a - b + c = 0 \text{ und } a + b = 0.$$

Setzen wir $a = 1$ in die beiden anderen Gleichungen ein, erhalten wir $b = -1$ und $c = 1$, womit die Koeffizienten bestimmt wären.

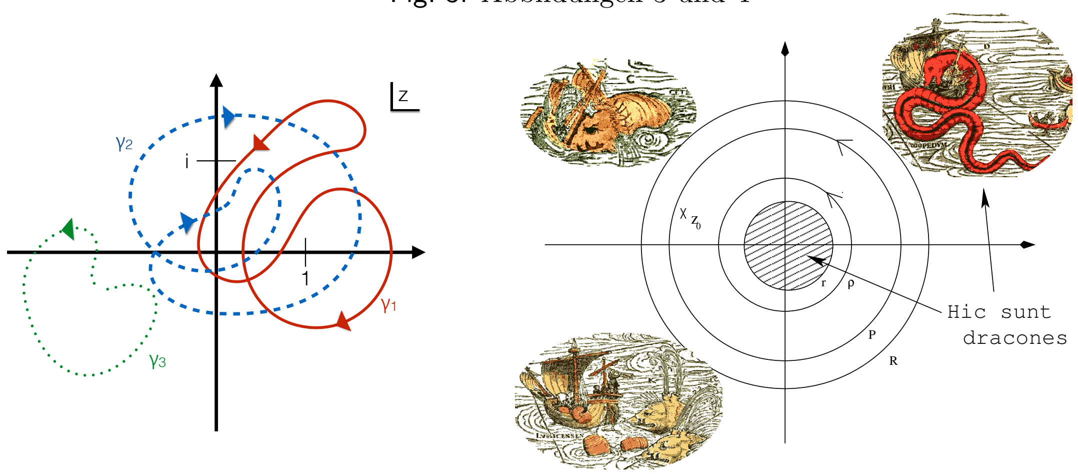
Zu ii): Betrachten wir nun nacheinander die Kurven γ_1, γ_2 und γ_3. Die erste uns ist uns schon mit Ergebnis aus Aufgabe 1.2) bekannt. Mithilfe der Partialbruchzerlegung sehen wir nun direkt, dass $\mathrm{Res}_0 f = a = 1$ und $\mathrm{Res}_1 f = b = -1$ ist. Die Kurve γ_2 umrundet nun $z = 1$ einmal und $z = 0$ zweimal in positiver Richtung. Damit ist

$$\oint_{\gamma_2} \mathrm{d}z\ f(z) = 2\pi i(\nu_{\gamma_2}(0)\mathrm{Res}_0 f + \nu_{\gamma_2}(1)\mathrm{Res}_1 f) = 2\pi i(2 + (-1)) = 2\pi i.$$

Die Kurve γ_3 schließt keinen der Pole ein und damit ist

$$\oint_{\gamma_3} \mathrm{d}z\ f(z) = 0.$$

Fig. 3: Abbildungen 3 und 4



2.3 Cauchys Integralsatz auf Kreisringen

Sei $f : U \mapsto \mathbb{C}$ holomorph auf einem Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und ρ, P so gewählt, dass $0 \leq r < \rho < P < R \leq \infty$, so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_P(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \forall\ z_0 : \rho < |z_0| < P \tag{1}$$

i) Betrachten Sie zunächst den Integrand $\frac{f(z)}{z-z_0}$. Bestimmen Sie die mögliche Position von Singularitäten, sowie die Umlaufzahlen bei den Kontourintegrationen über $\partial K_P(0)$ und $\partial K_\rho(0)$

ii) Beweisen Sie die Aussage in (1) mit Hilfe des Residuensatzes.

Zu i): Der Integrand $g(z) := \frac{f(z)}{z-z_0}$ kann erstmal überall Singularitäten haben, wo f nicht holomorph ist. Das heißt hier für $|z| \leq r$ und $|z| \geq R$, wobei dort auch alles Mögliche lauern kann. Zusätzlich kommt der einfach Pol $z = z_0$, welcher im Kreis $K_P(0)$ enthalten ist, aber nicht in $K_\rho(0)$. Alle Singularitäten $|z| \geq R$ werden nicht von den beiden Kreisen umrundet und haben entsprechend die Umlaufzahlen:

$$\nu_{\partial K_P(0)}(a) = 0 \text{ und } \nu_{\partial K_\rho(0)}(a) = 0 \;\; \forall\, a \in \mathbb{C}\backslash K_R(0).$$

Die Singularitäten mit $|z| \leq r$ werden einmal von beiden Kreisen umrundet:

$$\nu_{\partial K_P(0)}(a) = 1 \text{ und } \nu_{\partial K_\rho(0)}(a) = 1 \;\; \forall\, a \in K_r(0).$$

Die zusäzliche Singularität $z = z_0$ wird von $\partial K_P(0)$ einmal umrundet , aber nicht von $\partial K_\rho(0)$:

$$\nu_{\partial K_P(0)}(z_0) = 1 \text{ und } \nu_{\partial K_\rho(0)}(z_0) = 0.$$

Zu ii): Da f holomorph auf U ist, müssen die Integrale endlich sein. Betrachten wir nun das Integral um $\partial K_P(0)$, so unterscheidet sie sich nur von dem Integral um $\partial K_\rho(0)$ durch den zusätzlichen einfachen Pol $z = z_0$ von g. Damit haben wir nach dem Residuensatz

$$\oint_{\partial K_P(0)} \mathrm{d}z\; g(z) = 2\pi i \nu_{\partial K_P(0)}(z_0) \mathrm{Res}_{z_0} g + \oint_{\partial K_\rho(0)} \mathrm{d}z\; g(z)$$

Das Residuum ist

$$\mathrm{Res}_{z_0} g = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(z_0)} \mathrm{d}z\; \frac{f(z)}{z - z_0} = f(z_0)$$

nach Cauchy's Integralformel. Die Umlaufzahl ist wie oben erwähnt Eins. Damit erhalten wir durch Subtraktion des Integrals um $\partial K_\rho(0)$ und teilen durch $2\pi i$ die erwartete Formel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_P(0)} \mathrm{d}z\; g(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(0)} \mathrm{d}z\; g(z).$$