Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Mosterlösung zum Übungszettel 5:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Entwicklung in Potenzreihen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \log(z)$

i) Bestimmen Sie die Darstellung der Funktion als Potenzreihe um die Punkte $z_0 = 1$ und $z_0 = i$

Da die Funktion in einer offenen Umgebung um die Entwicklungspunkte holmorph ist haben wir zwei Moeglichkeiteum um die Darstellung als Potenzreihe zu bestimmen. Die einfachste Moeglichkeit besteht darin die Taylorreihe der Funktion um den jeweiligen Punkt zu bestimmen. Die Ableitungen der Funktion sind gegeben durch

$$f'(z) = \frac{1}{z} \ , \qquad f''(z) = (-1)\ \frac{1}{z^2} \qquad f'''(z) = (-1)^2\ 2\ \frac{1}{z^3} \qquad \cdots \tag{1}$$

so dass die $n - te$ Ableitung der Funktion geben ist durch

$$f^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n} \ , \qquad n > 0 \tag{2}$$

Das heisst ausgewertet an den jeweiligen Entwicklungspunkten erhalten wir

$$f^{(n)}(z_0 = 1) = (-1)^{n-1}(n-1)! \ , \qquad f^{(n)}(z_0 = i) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{i^n} = i^{n-1}(n-1)! \tag{3}$$

$$; , \tag{4}$$

Da die Funktionswerte an den Entwicklungspunkten durch $f(1) = \log(1) = 0$ und $f(i) = \log(i) = \log(e^{i\pi/2}) = i\pi/2$ gegeben sind ist die Taylorreihe der Funktion gegeben durch

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n-1)!\ \frac{(z-z_0)^n}{n!} = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(z-z_0)^n}{n} \ , \qquad \text{für} \qquad z_0 = 1 \ , \tag{5}$$

$$f(z) = \frac{i\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1}(n-1)!\ \frac{(z-z_0)^n}{n!} = \frac{i\pi}{2} - i\sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(z-z_0)^n}{n} \ , \qquad \text{für} \qquad z_0 = i \ , \tag{6}$$

Die zweite Moeglichkeit besteht darin die explizite Darstellung der Koeffizienten durch die Cauchy Formel zu verwenden. Damit sind die Koeffizienten a_n gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R(1)} dz \frac{f(z)}{(z-1)^{n+1}} \ , \tag{7}$$

fuer beliebiges $0 < R < 1$. Durch die uebliche Parametrisierung des Integrals $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = 1 + Re^{it}$ und $\gamma'(t) = iRe^{it}$ erhaelt man

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\ Re^{it}\ \frac{\log(1+Re^{it})}{R^{n+1}e^{i(n+1)t}} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\ R^{-n}e^{-int}\log(1+Re^{it})\ . \tag{8}$$

Das entsprechende Integral ist kompliziert auszuwerten, daher empfiehlt sich in diesem Fall die Taylorentwicklung. Die einfachste Moeglichkeit besteht darin partielle Integration anzuwenden so dass fuer $n > 0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\left[\left(R^{-n}\frac{1}{-in}e^{-int}\right)\log(1+Re^{it})\right]_{t=0}^{t=2\pi} - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\ \left(R^{-n}\frac{1}{-in}e^{-int}\right)\frac{1}{1+Re^{it}}\ . \tag{9}$$

Da der erste Term verschwindet, so dass das Integral gegeben ist durch

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\ iRe^{it}\ \frac{R^{-(n+1)}e^{-i(n+1)t}}{1+Re^{it}} && (10)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} dt\ iRe^{it}\ \frac{(1+Re^{it}-1)^{-(n+1)}}{1+Re^{it}} && (11)\\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K_R(1)} \frac{\frac{1}{z}}{(z-1)^{n+1}} && (12)\end{aligned}$$

Das verbleibende Integral kann mit Hilfe der Cauchy Formeln fuer Ableitungen ausgewertet werden, es gilt

$$\frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial K_R(1)} \frac{\frac{1}{z}}{(z-1)^{n+1}} = \frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z}\right)\bigg|_{z=1}\ , \tag{13}$$

wobei die Ableitungen durch

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(\frac{1}{z}\right) = n!(-1)^n\ z^{n+1} \tag{14}$$

gegeben sind. Damit liefert eine explizite Auswertung des Integrals den korrekten Wert der Koeffizienten

$$a_n = -\frac{(-1)^n}{n} \qquad n > 0\ . \tag{15}$$

Natuerlich kann man fuer die Entwicklung um $z_0 = i$ analog vorgehen, allerdings ist die Taylorentwicklung wie bereits gesehen wesentlich einfacher.

ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der beiden Potenzreihen

Damit wir den Konvergenzradius bestimmen koennen betrachten wir das Quotientenkriterium. Wir bestimmen zunaechst das Verhaeltnis der Koeffizienten $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ mit $c_n = a_n z^n$, welches fuer beide Entwicklungspunkte durch

$$q_n = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{n}{n+1}|z| \tag{16}$$

gegeben ist. Damit die Reihe absolut konvergiert muss $\lim_{n\to\infty} q_n = q < 1$ gelten, dies genau dann der Fall wenn $|z| < 1$. Damit ist der Konvergenzradius in beiden Faellen $R = 1$. Dies war zu erwarten, da bei $z = 0$ die naechste (logarithmische) Singularitaet der Funktion vorliegt.

1.2 Singularitäten und Laurentreihen

Betrachten Sie die Funktionen $f_1(z) = \frac{z^6+1}{z^2+1}$, $f_2(z) = \frac{1}{\cos(z)}$

i) Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktion $f_1(z)$ und $f_2(z)$ und klassifizierien Sie diese hinsichtlich Ihrer Ordnung

   [Hinweis: Verwenden Sie den Satz von l'Hopital]

Da beide Funktionen von der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit g, h holomorph sind, sind die Singularitaeten der Funktion durch die Nullstellen des Nenners $h(z) = 0$ geben. Dementsprechend erhalten wir fuer f_1

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i \tag{17}$$

als moegliche Singulaere Punkte. Damit wir die Singularitaet klassifizieren koennen muessen wir fuer $n \geq 0$ den Grenzwert betrachten

$$\lim_{z \to \pm i} (z \mp i)^n \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} \; . \tag{18}$$

Da sowohl Zaehler als auch Nenner in diesem Grenzwert verschwinden benutzen wir den Satz von l'Hopital wonach

$$\lim_{z \to \pm i} (z \mp i)^n \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \to \pm i} \frac{n(z \mp i)^{n-1} \; (z^6 + 1) + (z \mp i)^n \; 6z^5}{2z} \; . \tag{19}$$

Damit wir die Singularitaet klassifizieren koennen muessen wir nach dem kleinsten n suchen fuer dass der Grenzwert existiert. Da der Grenzwert bereits fuer $n = 0$ existiert

$$\lim_{z \to \pm i} \frac{z^6 + 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \to \pm i} \frac{6z^5}{2z} = \lim_{z \to \pm i} 3z^4 = 3 \; , \tag{20}$$

laesst sich die Funktion stetig nach $z = \pm i$ fortsetzen. Dementsprechend handelt es sich um eine hebbare Singularitaet.

Beim zweiten Beispiel verfahren wir analog. Die Nullstellen des Nenners $h(z) = \cos(z)$ sind in diesem Fall gegeben durch

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi \; , \qquad k \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

Damit wir die Singularitaet klassifizieren koennen betrachten wir erneut den Grenzwert

$$\lim_{z \to \pi/2 + k\pi} (z - \pi/2 - k\pi)^n \frac{1}{\cos(z)} \; . \tag{22}$$

Diesmal ist es einfacher Schrittweise vorzugehen, d.h. wir betrachten als erstes $n = 0$, dann $n = 1$ usw. Wir erhalten fuer $n = 0$ den Ausdruck

$$\lim_{z \to \pi/2 + k\pi} \frac{1}{\cos(z)} \; , \tag{23}$$

der offensichtlich divergiert. Damit ist die Singularitaet schonmal nicht hebbar. Dementsprechend betrachten wir als naechstes $n = 1$

$$\lim_{z \to \pi/2 + k\pi} \frac{z - \pi/2 - k\pi}{\cos(z)} \overset{l'Hopital}{=} \lim_{z \to \pi/2 + k\pi} \frac{1}{-\sin(z)} = -(-1)^k \; . \tag{24}$$

Da der Grenzwert existiert handelt es sich also offensichtlich um einen Pol erster Ordnung.

Satz von L'Hopital

Sei $g(z)$ und $h(z)$ holomorph auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in G$ mit $g(z_0) = h(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$ und $h'(z_0) \neq 0$, dann gilt entsprechend des Satz von L'Hopital

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g'(z)}{h'(z)}$$

2 Hausübungen:

2.1 Berechnung von Kontourintegralen mit Laurentreihen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \exp(-1/z)$

i) Bestimmen Sie die Darstellung der Funktion als Laurentreihe um den Punkt $z_0 = 0$

Wir können hier analog zur Vorlesung vorgehen. Dazu setzen wir $-\frac{1}{z}$ in die Reihendarstellung der Exponentialfunktion ein.

$$\exp\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=-1}^{-\infty} (-1)^{-n} \frac{z^n}{(-n)!}$$

ii) Benutzen Sie die Darstellung der Funktion als Laurentreihe um das Kontourintegral $\oint_{\partial K_R(0)} f(z)dz$ zu bestimmen

Da die Laurentreihe absolut konvergiert, können wir gliedweise integrieren.

$$\oint_{\partial K_R(0)} dz \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n = 2\pi i a_{-1}.$$

Nun müssen wir nur noch identifizieren, was a_{n-1} in unserem Fall ist. Da dies ja der Vorfaktor zu z^{-1} ist, gilt $a_{-1} = \frac{-1}{1!}$. Daher $\oint_{\partial K_R(0)} f(z)dz = -2\pi i$

2.2 Singularitäten und Laurentreihen

Betrachten Sie die Funktionen $f(z) = \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2}$, $g(z) = \sin(1/z)$ und $h(z) = \frac{\tan(z)}{z}$

i) Bestimmen Sie die Singularitäten der Funktionen $f(z)$,$g(z)$ und $h(z)$ und klassifizierien Sie diese hinsichtlich Ihrer Ordnung

Wir können den Sinus durch seine Reihendarstellung darstellen und die Polstelle einsetzen. Dann erhalten wir

$$\sin(z-\pi) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(z-\pi)^{2l+1}}{(2l+1)!}$$

Nun können wir außerdem durch $(z-\pi)^2$ teilen.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(z-\pi)^{2(j-1)+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=-1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{(z-\pi)^{2j+1}}{(2(j+1)+1)!}\end{aligned}$$

Da das kleinste n mit nicht verschwindende a_n bei $n = -1$ ist, handelt es sich um eine Polstelle erster Ordnung. Hierbei ist zu beachten, dass das $n = -1$ der kleinste Exponent ist und nicht der kleinste Index, bei dem die Summe startet.
Bei $g(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$ können wir ebenfalls den Sinus in seiner Reihendarstellung verwenden.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(1/z)^{2(j-1)+1}}{(2j+1)!} \\ &= \sum_{j=0}^{-\infty} (-1)^{-j} \frac{z^{2j+1}}{(-2l+1)!}\end{aligned}$$

Wir sehen also, dass das niedrigste a_n bei $n = -\infty$ liegt, weshalb es sich hier um eine wesentliche Nullstelle handelt.
Für h(z) schauen wir uns die z=0 an, bei der eine Singularität liegt. Da der Tangens an der Stelle auch verschwindet $\tan(0) = 0$, können wir wieder L'Hopital benutzen, um zu überprüfen, ob die Polstelle hebbar ist.

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \qquad \frac{d}{dz}\tan(z) = \frac{\cos^2(z) + \sin^2(z)}{\cos^2(z)} = 1 + \tan^2(z)$$

Man kann leicht sehen, dass nach L'Hopital $\frac{\tan(z)}{z} = 1$ ergibt, da $\tan(0)^2 = 0$ und die Ableitung $\frac{d}{dz}z = 1$ ist. Dieser Pol ist also hebbar.
Nun besitzt $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ selbst noch Pole, die durch die Nullstellen des Cosinus gegeben sind. Dies ist keine hebbare Polstelle, wie leicht zu sehen ist. Überprüfen wir nun, ob es sich um einen Pol erster Ordnung handelt. Dazu schauen wir, ob folgender Limes existiert.

$$\lim_{z\to\pi/2+k\pi}(z - \pi/2 - k\pi)\frac{\sin(z)}{z\cos(z)}$$

Da Zähler und Nenner verschwinden, können wir L'Hopital verwenden.

$$\lim_{z\to\pi/2+k\pi}(z - \pi/2 - k\pi)\frac{\sin(z)}{z\cos(z)} \overset{l'Hopital}{=} \lim_{z\to\pi/2+k\pi}\frac{\sin(z) + (z - \pi/2 - k\pi)\cos(z)}{\cos(z) - z\sin(z)} = \frac{1+0}{0 - (\pi/2 + k\pi)}$$

Folglich existiert der Limes und die Funktion hat dort Pole erster Ordnung.

ii) Entwickeln Sie $f(z)$ in eine Laurentreihe um $z_0 = \pi$ und bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Laurentreihe

[Hinweis: Eine Laurentreihe konvergiert genau dann wenn ihr Haupt- und Nebenteil konvergieren]

Die Laurent-Reihe habe wir schon im Teil i) ausgerechnet.

$$\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} = \sum_{j=-1}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(z-\pi)^{2j+1}}{(2(j+1)+1)!}$$

Damit ist besteht der Hauptteil lediglich aus dem Term mit $j = -1$.

$$1^{-1+1}\frac{(z-\pi)^{2\cdot(-1)+1}}{(2*(-1+1)+1)!} = \frac{1}{z-\pi}$$

Damit konvergiert der Hauptteil $\forall z \neq \pi$. Der Nebenteil besteht aus den Summanden mit positiven j.

$$\text{Nebenteil}: \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{j+1}\frac{(z-\pi)^{2j+1}}{(2(j+1)+1)!}$$

Um den Konvergenbereich des Nebenteils zu berechnen, können wir wieder das Quotientenkriterium verwenden.

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{(j+1)+1}(z-\pi)^{2(j+1)+1}}{(2(j+1+1)+1)!}}{\frac{(-1)^{j+1}(z-\pi)^{2j+1}}{(2(j+1)+1)!}}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{(-1)(z-\pi)^2}{(2j+5)(2j+4)}\right| = 0 < 1$$

Das heißt, dass die Laurentreihe definiert ist $\forall z \neq \pi$.