Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 10:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Vektorraum, Dualraum und Braket Notation

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $P_2([-1,1],\mathbb{R})$ von Polynomen mit Grad kleiner gleich zwei also $\Big\{p : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto p(x) = a + bx + cx^2 \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}\Big\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation, sowie dem Skalarprodukt

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} dx f(x) g(x)$$

i) Verifizieren Sie dass $\{e_i\}$ mit $e_1(x) = 1/\sqrt{2}$, $e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $e_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2 - 1)$ eine Orthonormalbasis von $P_2([-1,1],\mathbb{R})$ bilden

ii) Geben Sie den Dualraum $P_2^*([-1,1],\mathbb{R})$ an und bestimmen Sie eine Basis $\{e_i^*\}$ des Dualraums.

iii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$L : P_2([-1,1],\mathbb{R}) \to P_2([-1,1],\mathbb{R}) \qquad a + bx + cx^2 \mapsto b + ax$$

in der in i) gegebenen Orthonormalbasis

Zu i): Wir überprüfen zunächst, ob ein beliebiger Vektor $p(x) = a + bx + cx^2 \in P_2([-1,1],\mathbb{R})$ durch die Basis darstellbar ist. Dazu schauen wir, wie wir in die offensichtliche Basis $1, x, x^2$ umwandeln können:

$$1 = \sqrt{2}e_1(x), \quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}e_2(x), \quad x^2 = \sqrt{\frac{8}{45}}e_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3}e_1(x)$$

und haben somit

$$\begin{aligned} a + bx + cx^2 &= a\sqrt{2}e_1(x) + b\sqrt{\frac{2}{3}}e_2(x) + c\left(\sqrt{\frac{8}{45}}e_3(x) + \frac{\sqrt{2}}{3}e_1(x)\right) \\ &= \left(a + \frac{c}{3}\right)\sqrt{2}e_1(x) + b\sqrt{\frac{2}{3}}e_2(x) + c\sqrt{\frac{8}{45}}e_3(x). \end{aligned}$$

Weiterhin müssen wir die Orthonormalität der Basis Vektoren überprüfen, also

$$< e_i, e_j >= \delta_{i,j}$$

Hierbei benutzen wir, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist und berechnen explizit

$$\begin{aligned}
< e_1, e_2 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \; x = 0 \\
< e_1, e_3 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1) = \frac{\sqrt{5}}{4}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \; (3x^2-1) = \frac{\sqrt{5}}{4} \left.(x^3-x)\right|_{-1}^{+1} = 0 \\
< e_2, e_3 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{3}{2}}x\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1) = \frac{\sqrt{15}}{4}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \; (3x^3-x) = \frac{\sqrt{15}}{4} \left.\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right)\right|_{-1}^{+1} = 0 \\
< e_1, e_1 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}2 = 1 \\
< e_2, e_2 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}}x^2 = \frac{3}{2}\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{+1} = \frac{3}{2}\frac{2}{3} = 1 \\
< e_3, e_3 > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \, \sqrt{\frac{5}{8}}\sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)^2 = \frac{5}{8}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x \; (9x^4-6x^2+1) = \frac{5}{8}\left.\left(\frac{9x^5}{5} - 2x^3 + x\right)\right|_{-1}^{+1} \\
&= \frac{5}{8}\left(\frac{18}{5} - 4 + 2\right) = \frac{5}{8}\frac{8}{5} = 1.
\end{aligned}$$

Zu ii): Der Dualraum $P_2^*([-1,1],\mathbb{R})$ ist per Definition gegeben durch die Menge der linearen Abbildungen der Polynome in $P_2([-1,1],\mathbb{R})$ in den Körper $\mathbb{R}$, das heißt

$$\left\{ \begin{array}{lccc} p^*\colon & P_2([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q(x) & \longmapsto & p^*(q(x)) \end{array} \;\middle|\; p^* \;\; \mathbb{R}\text{-linear} \right\}.$$

Eine natürliche Realisierung ist durch das Skalarprodukt als

$$\left\{ \begin{array}{lccc} p^*\colon & P_2([-1,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & q(x) & \longmapsto & p^*(q(x)) =< p(x), q(x) > \end{array} \;\middle|\; p(x) \in P_2([-1,1],\mathbb{R}) \right\}$$

gegeben. Damit ist auch direkt ein Isomorphismus $P_2([-1,1],\mathbb{R}) \to P_2^*([-1,1],\mathbb{R}), p(x) \mapsto < p(x), \cdot >$ gegeben, womit wir auch direkt eine Basis $e_i(x) \mapsto < e_i(x), \cdot >= e_i^*(\cdot)$ angegeben können. Dies ist die duale Basis zu $\{e_1(x), e_2(x), e_3(x)\}$ aufgrund der letzten Rechnung von i).

Zu iii): Die Abbildung $L\colon P_2([-1,1],\mathbb{R}) \to P_2([-1,1],\mathbb{R}), a + bx + cx^2 \mapsto b + ax$ können wir als Matrix über

$$L_{ij} =< e_i(x), L(e_j(x)) >$$

angeben. Dabei ist $L_{3j} = 0$ für alle j, da wir nach der Abbildung keinen quadratischen Term mehr haben und wir so nur in den Unterraum $P_1([-1,1],\mathbb{R}) \subset P_2([-1,1],\mathbb{R})$ abbilden. Den Rest müssen wir explizit ausrechnen:

$$
\begin{aligned}
< e_1(x), L(e_1(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ x = 0 \\
< e_1(x), L(e_2(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x = \sqrt{3} \\
< e_1(x), L(e_3(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{\frac{5}{8}} x \right) = -\frac{\sqrt{5}}{4} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ x = 0 \\
< e_2(x), L(e_1(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \sqrt{\frac{3}{2}} x \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
< e_2(x), L(e_2(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \sqrt{\frac{3}{2}} x \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ x = 0 \\
< e_2(x), L(e_3(x)) > &= \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ \sqrt{\frac{3}{2}} x \left(-\sqrt{\frac{5}{8}} x \right) = -\frac{\sqrt{15}}{4} \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ x^2 = -\frac{\sqrt{15}}{4} \frac{2}{3} = -\frac{\sqrt{15}}{6}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich als Matrix

$$
L = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{\sqrt{15}}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

1.2 Dirac δ-Distribution

i) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \cos(x)\delta(ax + b)$ für $a \neq 0$

ii) Zeigen Sie dass $f_\epsilon(x) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\epsilon})}{\sqrt{2\pi\epsilon}}$ im Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$ für eine geeignete Klasse von Testfunktionen $\Psi(x)$ eine Darstellung der δ-Distribution liefert

$$
I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \cos(x)\delta(ax + b)
$$

Zu i): Zunächst substituieren wir mit $y = ax$. Das heißt, wir haben $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{d}y$, was kein Problem ist, da $a \neq 0$ ist. Ist $a > 0$, so haben wir

$$
I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a}\ \cos(y/a)\delta(y - (-b)) = \frac{1}{a} \cos\left(-\frac{b}{a}\right).
$$

Ist nur $a < 0$, so drehen sich die Grenzen um und wir haben

$$
I = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{\mathrm{d}y}{a}\ \cos(y/a)\delta(y - (-b)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{(-a)}\ \cos(y/a)\delta(y - (-b)) = \frac{1}{(-a)} \cos\left(-\frac{b}{a}\right),
$$

womit wir insgesamt

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \cos(x)\delta(ax + b) = \frac{1}{|a|} \cos\left(-\frac{b}{a}\right)
$$

für $a \neq 0$ schreiben können.
Zu ii): Insgesamt müssen wir für ein geeignetes $\Psi(x)$ zeigen, dass

$$
I = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \Psi(x) \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\epsilon})}{\sqrt{2\pi\epsilon}} = \Psi(0)
$$

ist. Dazu substituieren wir $y = x/\sqrt{2\epsilon}$ und erhalten so

$$I = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \Psi(\sqrt{2\epsilon} y) \frac{\exp(-y^2)}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \lim_{\epsilon\to 0} \Psi(\sqrt{2\epsilon} y) \exp(-y^2).$$

Die Vorraussetzung für die Vertauschung von Limes und Integral ist hier, dass das entsprechende Integral auch für festes ϵ auch exisitert. Um den Limes am Ende zu nehmen brauch man noch dazu die Stetigkeit von $\Psi(x)$ bei $x = 0$. Damit haben wir

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \Psi(0) \exp(-y^2) = \Psi(0) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \Psi(0),$$

womit $f_\epsilon(x)$ eine Darstellung der δ-Distribution ist.

2 Hausübungen:

2.1 Dirac δ-Distribution

Berechnen Sie folgende Integrale

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2}\delta\Big(x^2-1\Big)$

ii) $\int_0^{2\pi} dx\ x^2\delta\Big(\cos(x)\Big)$

Vorbemerkung:
Allgemein haben wir es hier mit Integralen der Form

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)\delta(g(x))$$

zu tun, wobei $g(x)$ einfache nicht-zusammenhängende Nullstellen $y_1 < \ldots < y_n \in (a,b)$ hat. "'Einfach"' bedeutet hier, dass die erste Ableitung $g'(y_k) \neq 0$ ist. Entsprechend können wir ein $\epsilon > 0$ finden, sodass

$$2\epsilon < \min_k |y_{k+1} - y_k|$$

ist. Da die δ-Funktion überall Null ist außer an diesen Stellen, schreiben wir das Integral als

$$I = \int_a^b \mathrm{d}x\ f(x)\delta(g(x)) = \sum_{k=1}^n \int_{y_k-\epsilon}^{y_k+\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x)\delta(g(x))$$

Nun können wir das ϵ beliebig klein wählen bzw. sogar den Limes nehmen und entwickeln $g(x) = g(y_k) + g'(y_k)(x-y_k) + \mathcal{O}((x-y_k)^2) = g'(y_k)(x-y_k) + \mathcal{O}((x-y_k)^2)$ um die Nullstellen y_k. Damit ist $\mathcal{O}((x-y_k)^2) > \mathcal{O}(\epsilon^2)$ und wir können die in 1.2 i) hergeleitete Formel verwenden, da $g'(y_k) \neq 0$ ist:

$$I = \lim_{\epsilon\to 0} \sum_{k=1}^n \int_{y_k-\epsilon}^{y_k+\epsilon} \mathrm{d}x\ f(x)\delta\left(g'(y_k)(x-y_k) + \mathcal{O}((x-y_k)^2)\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{|g'(y_k)|} f(y_k)$$

Lösung zu i): Hier ist $g(x) = x^2 - 1$, welches die Nullstellen $x = \pm 1 \in (-\infty, +\infty)$ hat. Die erste Ableitung $g'(x) = 2x$, welches an den Stellen $g'(\pm 1) = \pm 2 \neq 0$ ist. Damit könne wir die eben hergeleitete Formel anwenden und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\ e^{-x^2}\delta\Big(x^2-1\Big) = \frac{1}{2}\left(e^{-1^2} + e^{-(-1)^2}\right) = e^{-1}.$$

Lösung zu ii): Hier ist $g(x) = \cos(x)$, welches imd Interval $(0, 2\pi)$ die Nullstellen $x = \pi/2, 3\pi/2$ hat. Die erste Ableitung ist $\cos'(x) = -\sin(x)$ und somit $-\sin(\pi/2) = -1$ und $-\sin(3\pi/2) = +1$ ungleich Null. Wir benutzen die Formel und erhalten

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ x^2\delta\Big(\cos(x)\Big) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{9\pi^2}{4} = \frac{5\pi^2}{2}.$$

2.2 Dirac δ-Distribution

Zeigen Sie für die folgenden Funktionen $f_\epsilon(x)$ dass $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$ für eine geeignete Klasse von Testfunktionen $\Psi(x)$ eine Darstellung der δ-Distribution liefert

i) $f_\epsilon(x) = \frac{e^{-|x|/\epsilon}}{2\epsilon}$

ii) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}$

Zu i): Hier gehen wir ähnlich vor wie in 1.2 ii): Wir müssen das Integral

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \Psi(x)\frac{e^{-|x|/\epsilon}}{2\epsilon}$$

berechnen und auf die Eigenschaften der Testfunktion $\Psi(x)$ schließen. Dazu teilen wir das Integral auf in das Interval $(-\infty, 0]$ und $[0, +\infty)$ und substituieren jeweils $y = -x/\epsilon$ und $y = x/\epsilon$

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}x\ \Psi(x)\frac{e^{x/\epsilon}}{2\epsilon} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \Psi(x)\frac{e^{-x/\epsilon}}{2\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(-\int_{+\infty}^{0} \mathrm{d}y\ \Psi(-\epsilon y)\frac{e^{-y}}{2} + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \Psi(\epsilon y)\frac{e^{-y}}{2}\right).$$

Das können nach Umdrehen der Grenzen beim ersten Integral zusammenfassen und erhalten

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \frac{\Psi(\epsilon y) + \Psi(-\epsilon y)}{2}e^{-y} = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\ e^{-y}\ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Psi(\epsilon y) + \Psi(-\epsilon y)}{2}.$$

Die Vorausetzung hierfür ist wieder die Konvergenz des Integrals für festes ϵ. Um dann am Ende den Limes nehmen zu dürfen, muss $\Psi(x)$ bei $x = 0$ stetig sein und wir erhalten

$$I = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\ e^{-y}\ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\Psi(\epsilon y) + \Psi(-\epsilon y)}{2} = \Psi(0)\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}y\ e^{-y} = \Psi(0).$$

Zu ii): Analog schreiben wir das Integral um mit $y = x/\epsilon$ und erhalten

$$I = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ \Psi(x)\frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \Psi(\epsilon y)\frac{\sin(y)}{y}.$$

Wir fordern, dass das Integral für festes ϵ existiert und $\Psi(x)$ wie vorher auch stetig in Null ist. Dann können wir Limes und Integral vertauschen

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \lim_{\epsilon\to 0}\Psi(\epsilon y)\frac{\sin(y)}{y} = \Psi(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \frac{\sin(y)}{y}.$$

Das letzte Integral erkennen wir als Imaginärteil des Integrals $\int \mathrm{d}y\ \frac{e^{iy}}{y}$, welches wir nach analytischer Fortsetzung als Hauptwertintegral interpretieren. Die Kontour kann nach oben geschlossen werden und wir haben nur einen Pol bei $z = 0$. Der Linkswert ist entprechend Null und der Rechtswert das Residuum mal $2\pi i$. Damit haben wir

$$\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z} = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{R}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}z\ \frac{e^{iz}}{z} = \frac{0 + 2\pi i \mathrm{Res}_{z=0}\frac{e^{iz}}{z}}{2} = i\pi e^0 = i\pi,$$

womit $\int \mathrm{d}y \frac{\sin(y)}{y} = \mathrm{Im}\ i\pi = \pi$ ist. Insgesamt haben wir dann

$$\Psi(0)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y\ \frac{\sin(y)}{y} = \Psi(0)\frac{\pi}{\pi} = \Psi(0),$$

was zu zeigen war.

2.3 Weihnachtsaufgabe

Bestimmen Sie für $f(z) = z$ das Integral $\oint_\gamma dz\ f(z)$ entlang der in Abb. 1 eingezeichnet Kontur γ.

Die Funktion $f(z) = z$ is in der ganzen komplexen Ebene holomorph. Da der Tannenbaum γ eine geschlossene Kurve ist, ist

$$\oint_\gamma dz\ f(z) = 0.$$

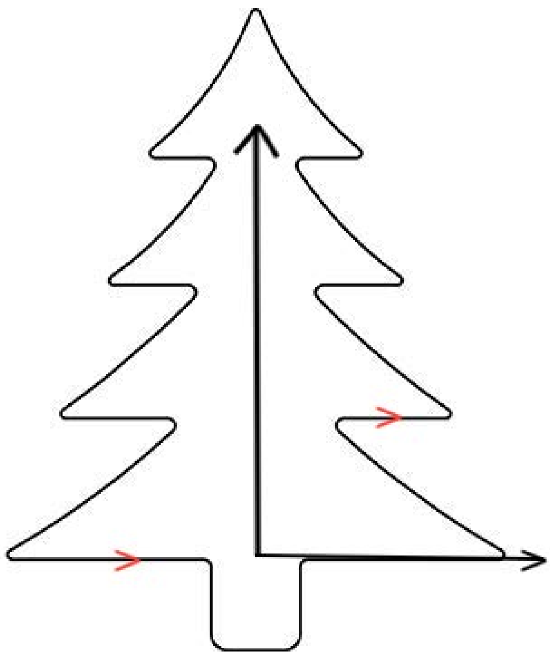

Fig. 1: Frohe Weihnachten!