Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 4:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Cauchys Integralsatz und Kontourdeformationen

Betrachten Sie die komplexen Kontourintegrale $I_r = \int_{\partial K_r(0)} f(z)$ und $I_R = \int_{\partial K_R(0)} f(z)$ der komplexen Funktion $f(z)$. Welche Aussagen knnen Sie ber die Integrale I_r und I_R treffen wenn

i) r,R beliebig und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist

ii) $R > r > 1$ und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash K_1(0)$ ist

iii) r,R beliebig und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -1, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$ ist

Angenommen $r, R > 0$, so sind die Integrale $I_{r,R}$ wohldefiniert und im Fall i) sind diese Null, da $\partial K_{r,R}(0)$ ein geschlossener Weg ist und der Integrand überall holomorph ist (Cauchy's Integralsatz).

Im Fall ii), sind $I_{r,R}$ im Allgemeinen nicht Null, da die Wege ein Gebiet umschließen, wo f nicht unbedingt holomorph ist. Wir können aber einen Weg konstruieren, welcher ein einfach Gebiet umschließt, wo f holomorph ist und entsprechend das Integral Null ist (siehe Graphik) und I_r mit positiven und I_R mit negativem Vorzeichen enthalten sind. Das Wegintegral, um die beiden Kreise zu verbinden wird einmal vorwärts und einmal rückwärts durchlaufen, weswegen sich diese Integrale ausgleichen. Letztendlich ist damit

$$I_r = I_R.$$

Im Fall iii) kann sind die Wegintegrale natürlich Null, wenn $r, R < 1$ sind. Für den Fall, dass einer oder beide größer sind, kann man wieder eine Kontour, wie vorher konstruieren (siehe zweite Graphik).

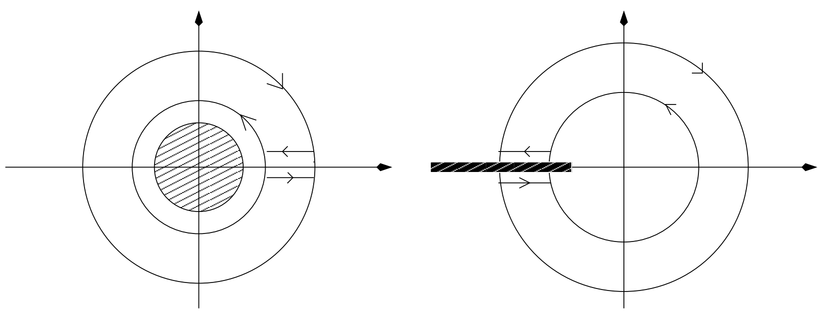


Fig. 1: Zu Aufgabe 1.1 ii) und iii).

Diesmal gehen die Wege zur Verbindung der beiden Kreise oberhalb und unterhalb und oberhalb des Branch-Cuts entlang und heben sich im Allgemeinen nicht weg. Entsprechend unterscheiden sich die beiden Kreisintegrale genau um diesen Weg:

$$I_r = I_R - (I^{\text{oben}}_{r\to R} + I^{\text{unten}}_{R\to r})$$

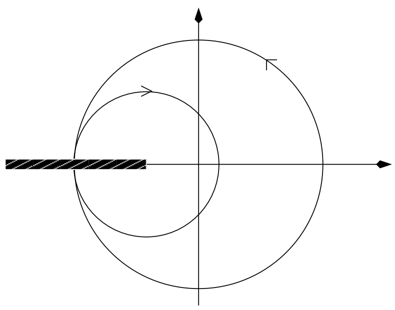
1.2 Berechnung von Integralen durch Kontourdeformation

Betrachten Sie die die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = (z+1)^{1/2}$ wobei der Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion zu betrachten ist.

i) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} f(z)\ dz \qquad R > 1$$

durch geeignete Deformation der Integrationskontour.



Parametrisieren wir das Kreisintegral durch $z = Re^{it}$ steht im Integranden das Differential

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}t(iRe^{it}) \ \text{ mit } \ t \in [-\pi, \pi),$$

welches wir schlecht mit der Funktion $f(z) = \sqrt{z+1}$ integrieren können. Wir können aber, wie in der Abbildung zu sehen, einen Weg aus zwei Kreisen konstruieren, welcher ein Gebiet einschließt, wo f holomorph ist. Dieser zweite Kreis ist so gewählt, dass $z = -1$ der Mittelpunkt ist, womit sich unser Funktionsterm vereinfacht. Nach Cauchy's Integralsatz ist die Summe beider Kreisintegrale Null und wir erhalten, dass das zweite Kreisintegral in positiver Orientierung dasselbe Ergebnis wie das Erste liefern muss. Hier haben wir die Parametrisierung $z = -1 + (R-1)e^{it}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K_R(0)} \mathrm{d}z f(z) &= \oint_{\partial K_{(R-1)}(-1)} \mathrm{d}z f(z) = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}t\ i(R-1)e^{it}\sqrt{(R-1)e^{it}} \\ &= i(R-1)^{3/2}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{d}t e^{\frac{3}{2}it} = i(R-1)^{3/2}\frac{2}{3i}\ e^{\frac{3}{2}it}\Big|_{-\pi}^{+\pi} \\ &= \frac{2}{3}(R-1)^{3/2} 2i\sin((3/2)\pi) = -\frac{4i}{3}(R-1)^{3/2}.\end{aligned}$$

1.3 Komplexe Kontourintegrale

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$

i) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie an auf welchem Bereich f holomorph ist.

ii) Berechnen Sie die komplexen Kontourintegrale $\oint_{\partial K_{17}(3)} f(z)\,dz$ und $\oint_{\partial K_3(3)} f(z)\,dz$ wobei $\partial K_{17}(3)$ und $\partial K_3(3)$ die Kreise mit Radius $R = 17$ und $R = 3$ um den Punkt $z = 3$ bezeichnen.

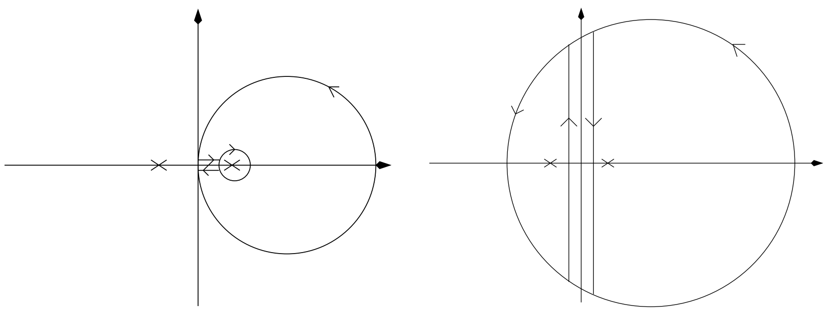
Wir schreiben f neu als

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

und erkennen, dass wir zwei Pole erster Ordnung bei $z = \pm 1$ hat. Damit ist f dort nicht holomorph, aber an jeder anderen Stelle, also $\mathbb{C} \backslash \{+1, -1\}$. Die Ableitung ist kanonisch

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{-2z}{(z+1)^2(z-1)^2},$$

welche dieselben Pole hat, nur dass diese nun zweiter Ordnung sind.



Zum Bestimmen der beiden Kontourintegrale, nutzen wir, dass f überall holomorph ist, bis auf die zwei Pole. Die eine Kontour $\partial K_3(3)$ umschließt nur den Pol bei $z = 1$ und ergibt nach Cauchy's Integralsatz (siehe 1. Bild) dasselbe Integral, wie der eines ϵ-Kreis um den Pol, welches wir über Cauchy's Integralformel berechnen:

$$\oint_{\partial K_3(3)} \mathrm{d}z f(z) = \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{1/(z+1)}{z-1} = 2\pi i \left[\frac{1}{z+1}\right]_{z=1} = \pi i.$$

Die andere Kontour $\partial K_{17}(3)$ umschließt beide Pole und lässt sich (wie in Bild 2 gezeigt) in zwei Kontouren mit positiver Orientierung um die beiden Pole aufteilen. Diese können wieder über Cauchy's Integralformel gerechnet werden:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K_{17}(3)} \mathrm{d}z f(z) &= \oint_{\partial K_\epsilon(1)} \mathrm{d}z \frac{1/(z+1)}{z-1} + \oint_{\partial K_\epsilon(-1)} \mathrm{d}z \frac{1/(z-1)}{z+1} \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{z+1}\right]_{z=1} + 2\pi i \left[\frac{1}{z-1}\right]_{z=-1} = \pi i - \pi i = 0.\end{aligned}$$

2 Hausübungen:

2.1 Cauchy's Integralformel

Bestimmen Sie die komplexen Kontourintegrale

i) $\oint_{\partial K_1(0)} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\, dz$

ii) $\oint_{\partial K_1(\pi)} \frac{\cos(z)}{z-\pi}\, dz$

iii) $\oint_{\partial K_{17}(3)} \frac{\exp(z)}{(z-\pi)^n}\, dz \qquad n \in \mathbb{N}$

Wie in den Aufgaben 1.3, wenden wir hier Cauchy's Integralsatz und -formel an, um die einzelnen Integrale zu berechnen.
Die Funktion bei i) ist überall holomorph, bis auf $z = \pi/2$. Allerdings ist $\pi/2 > 1$ und liegt damit nicht im eingeschlossenen Gebiet der Kontour $\partial K_1(0)$. Entsprechend ist das Integral über eine geschlossene Kurve in einem holomorphen Gebiet und nach dem Integralsatz Null.

$$\oint_{\partial K_1(0)} \mathrm{d}z\, \frac{\sin(z)}{z-\pi/2} = 0$$

Bei ii) haben wir einen nicht-hebbaren Pol bei $z = \pi$, da $\cos(\pi) = -1 \neq 0$ ist. Dazu liegt er innerhalb des eingeschlossenen Gebietes von $\partial K_1(\pi)$ und $\cos(z)$ ist dort holomorph. So können wir die Integralformel anwenden und erhalten

$$\oint_{\partial K_1(\pi)} \mathrm{d}z \frac{\cos(z)}{z-\pi} = \oint_{\partial K_\epsilon(\pi)} \mathrm{d}z \frac{\cos(z)}{z-\pi} = 2\pi i \cos(\pi) = -2\pi i.$$

Für iii) ist es klar, dass wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Pol n-ter Ordnung der Funktion vorliegen haben, welcher innerhalb von $K_{17}(3)$ liegt. Hier können wir die Cauchy Integralformel erstmal nur für $n = 1$ anwenden

$$\oint_{\partial K_{17}(3)} \mathrm{d}z \frac{\exp(z)}{z-\pi} = \oint_{\partial K_\epsilon(\pi)} \mathrm{d}z \frac{\exp(z)}{z-\pi} = 2\pi i \exp(\pi).$$

Für $n > 1$ benutzen wir die Cauchy Integralformel für Ableitungen

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} f(z)}{\mathrm{d}z^{(n-1)}}\right|_{z=z_0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{\partial K_\epsilon(z_0)} \mathrm{d}z\ \frac{f(z)}{(z-z_0)^n}$$

für eine holomorphe Funktion f. Da die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, haben wir

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial K_{17}(3)} \mathrm{d}z \frac{\exp(z)}{(z-\pi)^n} &= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_{\partial K_{17}(3)} \mathrm{d}z\ \frac{\exp(z)}{(z-\pi)^n} \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \left.\frac{\mathrm{d}^{(n-1)} \exp(z)}{\mathrm{d}z^{(n-1)}}\right|_{z=\pi} \\
&= \frac{2\pi i}{(n-1)!} \exp(\pi)
\end{aligned}$$

für $n > 1$.

2.2 Berechnung reeller Integrale mittels komplexer Kontourintegrale

i) Bestimmen Sie durch Verwendung von Cauchy's Integralsatz und geeignete Wahl einer komplexen Integrationskontour das reelle Integral

$$\int_0^\infty dx\ \sin\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)$$

Zunächst bemerken wir, dass der Integrand $\sin(x^2/\sqrt{2})e^{-x^2/\sqrt{2}}$ eine symmetrische Funktion in x ist und entsprechend das Integral als

$$I = \int_0^\infty dx\ \sin\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty dx\ \sin\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)$$

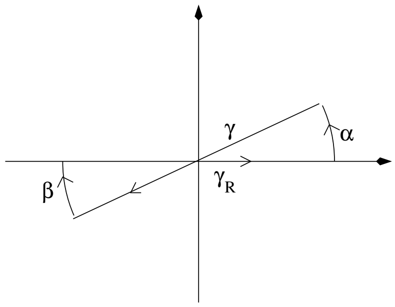
geschrieben werden kann. Weiterhin ist $\sin(x^2/\sqrt{2}) = \mathrm{Im}\ e^{i(x^2/\sqrt{2})}$. Da sonst nur reelle Größen im Integranden stehen, schreiben wir das Integral um in

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\ \sin\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\ \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\ \exp\left(i\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\ \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\ \exp\left(-\frac{1-i}{\sqrt{2}}x^2\right).$$

Nun betrachten wir erstmal das rechte Integral. Wir können $(1-i)/\sqrt{2} = e^{-i\pi/4}$ schreiben. Hier wäre es ideal eine Kontour zu wählen, sodass dieser Faktor ausgeglichen wird um ein normales Gauss-Integral zu erhalten. Das heißt

$$e^{-i\pi/4}z(t)^2 = t^2 \Leftrightarrow z(t)^2 = e^{i\pi/4}t^2 \Rightarrow z(t) := e^{i\pi/8}t,\ \ t\in\mathbb{R}$$

Die Kontour, wo wir ein normales Gauss-Integral erhalten ist also eine um den Winkel $\pi/8$ gedrehte gerade. Erstmal müssen wir aber überprüfen, ob diese dem Originalintegral entspricht. Dazu zeichnen wir eine geschlossene Kontour für ein endliches Integrationsinterval $[-R,+R]$, welche beide verbindet:



Das Integral über diese Kontour ist Null, da die Funktion $\exp(-e^{-i\pi/4}z^2)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist. Damit haben wir

$$\int_{\gamma_{\mathbb{R}}(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2) = -\left(\int_{\gamma(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2) + \int_{\alpha(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2) + \int_{\beta(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2)\right)$$

Im Limes $R\to+\infty$ müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass die beiden Verbindungsstücke verschwinden. Das rechte Verbindungsstück $\alpha(R)$ parametrisieren wir mit $z(t) = Re^{it}$, $t\in[0,\pi/8]$ und betrachten dessen Betrag

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\alpha(R)} \mathrm{d}z\ \exp\left(-e^{-i\pi/4}z^2\right)\right| &= \lim_{R\to+\infty}\left|iR\int_0^{\pi/8}\mathrm{d}t\ e^{it}\exp\left(-e^{-i\pi/4}e^{2it}R^2\right)\right| \\
&\leq \lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\pi/8}\mathrm{d}t\ \left|e^{it}\exp\left(-e^{i(2t-\pi/4)}R^2\right)\right| \\
&= \lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\pi/8}\mathrm{d}t\ \left|\exp\left(-\cos(\pi/4-2t)R^2\right)\exp\left(i\sin(\pi/4-2t)R^2\right)\right| \\
&= \lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\pi/8}\mathrm{d}t\ \exp\left(-\cos(\pi/4-2t)R^2\right) \\
&\leq \lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\pi/8}\mathrm{d}t\ \exp\left(-\cos(\pi/4)R^2\right) \\
&= \pi/8 \lim_{R\to+\infty}\frac{R}{\exp\left(R^2/\sqrt{2}\right)} = 0.
\end{aligned}$$

Analog verläuft die Rechnung für das linke Verbindungsstück $\beta(R)$. Damit haben wir gezeigt, dass wir einfach die Kontour $z(t) = e^{i\pi/8}t$, $t \in \mathbb{R}$ für das Integral nehmen können. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
I = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_{\mathbb{R}}(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2) &= -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma(R)}\mathrm{d}z\ \exp(-e^{-i\pi/4}z^2) \\
&= -\frac{1}{2}\mathrm{Im}\ \lim_{R\to\infty} e^{i\pi/8}\int_{+R}^{-R}\mathrm{d}t\ \exp\left(-e^{-i\pi/4}e^{i\pi/4}t^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Im}\ e^{i\pi/8}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\ \exp\left(-t^2\right) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin(\pi/8).
\end{aligned}$$