Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 3

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Komplexe Kontourintegrale

Wir betrachten im folgenden die Funktionen $f(z) = \bar{z} - z$ und $g(z) = \bar{z} + z$

i) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale $\oint_{\partial K_1(0)} f(z)$ und $\oint_{\partial K_1(0)} g(z)$ entlang des Einheitskreises $\partial K_1(0)$

Betrachten wir zunächst die beiden Funktionen f(z) und g(z), so fällt auf, dass sie beide aus den gleichen Bestandteilen bestehen. Wir können die Integrale, die wir berechnen müssen aufgrund der Linearität in ihre Einzelteile zerlegen. Wir wollen also nun die Integrale $\oint_{\partial K_1(0)} \bar{z}$ und $\oint_{\partial K_1(0)} z$ berechnen.
Dazu überlegen wir uns zunächst wie eine geeignete Parametrisierung des Weges aussieht. Beim Einheitskreis können wir dazu einfach die komplexe Exponentialfunktion nutzen. Wir wählen daher $c(t) = e^{it}$ mit $t \in [-\pi, \pi]$. Nun können wir das ganze einfach ausrechnen.

$$\oint_{\partial K_1(0)} \bar{z} = \int_{-\pi}^{\pi} (c(\bar{t}))c'(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt = 2\pi i$$

$$\oint_{\partial K_1(0)} z = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it} i e^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} e^{2it} dt = i \left[\frac{1}{2i} e^{2it}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Da sich beide Funktionen nur in z unterscheiden und dieses Integral 0 liefert, geben sie das gleiche Ergebnis, nämlich $\oint_{\partial K_1(0)} f(z) = \oint_{\partial K_1(0)} g(z) = 2\pi i$. Außerdem ist zu bemerken, dass z holomorph ist und eine exakte Berechnung nicht notwendig gewesen wäre.

ii) Berechnen Sie die komplexen Kurvenintegrale $\oint_{\triangleright} f(z)$ und $\oint_{\triangleright} g(z)$ entlang des Dreiecks $\triangleright$, das durch die Punkte $z_0 = 1$,$z_1 = -1+i$,$z_2 = -1-i$ aufgespannt wird und in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird.

Hier können wir ähnlich wie i) vorgehen und brauchen nicht einmal das Integral für z explizit zu berechnen. Den Weg teilen wir in 3 stetig differenzierbare Wege auf, wobei hier jeweils $t \in [0, 1]$ gewählt wurde.

$$c_{01}(t) = 1 + t(i - 2), \quad c_{12}(t) = i - 1 - 2ti, \quad c_{20} = -1 - i + t(2 + i)$$

Wir berechnen nun die Integrale entlang der 3 Wege.

$$\int_{01} \bar{z} = \int_0^1 (1-2t-ti)(i-2)dt = \int_0^1 (5t-2+i)\,dt = \left[\frac{5}{2}t^2 - 2t + it\right]_0^1 = \frac{1}{2} + i$$
$$\int_{12} \bar{z} = \int_0^1 (-1-i+2ti)(-2i)dt = \int_0^1 (2i-2+4t)\,dt = [2it - 2t + 2t^2]_0^1 = 2i$$
$$\int_{20} \bar{z} = \int_0^1 (-1+i+2t-ti)(2+i) = \int_0^1 (5t-3+i)\,dt = \left[\frac{5}{2}t^2 + it - 3t\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + i$$

Damit folgt für die Integrale $\oint_{\triangleright} f(z) = \oint_{\triangleright} g(z) = 4i$.

1.2 Holomorphie, Stammfunktionen und Cauchy's Integralsatz

Betrachten Sie die die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = (z+1)^{1/2}$ wobei der Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion zu betrachten ist

i) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie an auf welchem Gebiet die Funktion holomorph ist

Wie in der Vorlesung schon etabliert, gelten die gleichen Ableitungsregeln wie im reellen. Das heißt $\frac{\partial}{\partial z}(z+1)^{1/2} = \frac{1}{2}(z+1)^{-1/2}$. Wir können nun eine Substitution durchführen, sodass wir die komplexe Wurzelfunktion $f(u) = u^{1/2}$ mit $u = z+1$ betrachten. Wir wissen, dass diese einen branch cut auf der negativen reellen Achse hat. $f(z)$ ist also holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \Im(z) = 0, Re(z) \leq -1\}$.
Die Ableitung ist nun wieder eine Komposition von 1 und $((z+1)^{1/2})$. Sie ist somit überall komplex differenzierbar, wo es auch die beiden sind und $((z+1)^{1/2}) \neq 0$.

ii) Bestimmen Sie eine Stammfunktion F der Funktion f und geben Sie deren Definitionsbereich an.

Wir können wieder benutzen, dass sich die Ableitungsregeln ins komplexe übertragen. Wir behaupten, dass $F(z) = \frac{2}{3}(z+1)^{3/2}$ Stammfunktion von f(z)ist. Um dies zu zeigen leiten wir nun ab $\frac{\partial}{\partial z}F(z) = (z+1)^{1/2}$. F(z) muss nun holomorph sein, damit es sich um die Stammfunktion handelt. F(z) ist ebenfalls auf der gleichen Menge holomorph, wie f(z). Dementsprechend ist dies auch ihr Definitionsbereich.

iii) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} f(z)dz \qquad R < 1$$

wobei $\partial K_R(0)$ den Kreis mit Radius R um den Ursprung bezeichnet.

[*Hinweis*: Eine explizite Berechnung ist hierzu nicht notwendig.]

Hierbei handelt es sich um ein Kontourintegral, über eine Menge auf der die Funktion und auch die Stammfunktion holomorph sind. Dementsprechend gilt mit $R < 1$ und einer Parametrisierung des Weges $\gamma(t)$

$$\oint_{\partial K_R(0)} f(z)dz = F(\gamma(a)) - F(\gamma(b)) = F(\gamma(a)) - F(\gamma(a)) = 0$$

, da Anfangs- und Endpunkt des Weges die gleichen sind.

2 Hausübungen:

2.1 Holomorphie und Stammfunktionen

Betrachten Sie die den Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion $w : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto w(z) = z^{1/n}$ und $n \in \mathbb{N}$

i) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion w und geben Sie deren Definitionsbereich an.

$F(z) = \frac{1}{1+1/n} z^{1+1/n}$. F(z) ist abgesehen vom branch cut holomorph, d.h auf $\mathbb{C} \backslash \{\mathbb{R}^-\}$, und damit überall, außer auf dem branch cut definiert.

ii) Bestimmen Sie das folgende komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} w(z)dz \qquad R > 0$$

durch explizite Berechnung

Sei der Weg parametrisiert durch $\gamma(t) = Re^{it} \quad \text{mit} t \in (-\pi, \pi]$. Berechnen wir nun das Konturintegral, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} R^{1/n} e^{it/n} iRe^{it} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} R^{1+1/n} e^{it(1+1/n)} dt = iR^{1+1/n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{it(1+1/n)} dt \\
&= \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} \left[e^{it(1+1/n)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} \left(e^{i(\pi)(1+1/n)} - e^{-i(\pi)(1+1/n)} \right) \\
&= \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} 2i \sin(\pi(1+1/n))
\end{aligned}$$

iii) Bestimmen Sie das Integral aus ii) mit Hilfe der Stammfunktion.

Hinweis: Beachten Sie den Definitionsbereich der Stammfunktion und wählen Sie die Kontour entsprechend.

Aber hier müssen wir darauf achten, dass wir den branch cut nicht überqueren. Im Prinzip können wir die gleiche Kontur wählen und berechnen nun die Stammfunktion an den Endpunkten.

$$\begin{aligned}
F(Re^{i(\pi-\epsilon)}) &= \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} e^{i(\pi-\epsilon)(1+1/n)} \\
F(Re^{-i(\pi-\epsilon)}) &= \frac{R^{1+1/n}}{1+1/n} e^{-i(\pi-\epsilon)(1+1/n)}
\end{aligned}$$

Und wir gelangen offensichtlich beim gleichen Ergebnis an, wie in der Teilaufgabe zuvor, da $\oint_{\partial K_R(0)} w(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\pi+\epsilon}^{\pi-\epsilon} w(z)dz = \lim_{\epsilon \to 0} F(Re^{i(\pi-\epsilon)}) - F(Re^{-i(\pi-\epsilon)})$.

2.2 Residuen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \sum_{n=-N}^{N} a_n z^n$ mit $N \in \mathbb{N}$ und komplexen Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$

i) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} dz f(z)$$

.

Für diese Aufgabe können wir die C-Linearität des Integrals und Ergebnisse aus der Vorlesung nutzen. In der Vorlesung gab es bereits eine Herleitung dafür, dass $\oint_{\partial K_R(0)} z^n = 0$ mit $n \in \mathbb{Z}/\{-1\}$ gilt. Diese Terme brauchen also nicht weiter berücksichtigt werden. Außerdem gilt für n=-1 $\oint_{\partial K_R(0)} z^n = 2\pi i$. Das Ergebnis ist also $2\pi i a_{-1}$. a_{-1} wird auch als Residuum bezeichnet.