Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 2:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Cauchy-Riemann Bedingungen und Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $f(z) = z/\bar{z}$ und $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$

i) Bestimmen Sie alle Punkte $z \in \mathbb{C}$ in denen die Funktionen komplex differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung $f'(z)$ in diesen Punkten. Gibt es Teilmengen $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktionen holomorph sind?

Zuerst betrachten wir die Funktion $f(z) = z/\bar{z} = z^2/|z|^2$ und schreiben sie als Real- und Imaginärteil

$$f(x + iy) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i\frac{2xy}{x^2 + y^2} =: u(x, y) + iv(x, y).$$

Um komplex differenzierbar zu sein, müssen die Cauchy-Riemann Bedingungen(CR-Bedingungen)

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$$

erfüllt sein. Also bestimmen wir die jeweiligen Ableitungen von $u(x, y)$ und $v(x, y)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \overset{!}{=} \quad \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= \frac{-4x^2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \overset{!}{=} \quad \frac{2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Nenner vom polynomiellen Grad 4 sind, während die Zähler vom Grad 3 sind. Entsprechend divergieren die Ableitungen, wenn wir uns Null nähern. Daher ist die Funktion bei Null nicht holomorph. Nun können wir die Nenner rausteilen und bekommen

$$3y^2 = x^2 \quad \text{und} \quad y^2 = 3x^2,$$

welche beide nur erfüllt sein können, wenn $x = y = 0$ ist. Damit ist f nirgends komplex differenzierbar und damit auch nicht holomorph.
Sei nun

$$f(x + iy) = (x^2 + y) + i(y^2 - x) =: u(x, y) + iv(x, y)$$

und überprüfen die CR-Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= 2x \quad \overset{!}{=} \quad 2y = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= 1 \quad \overset{!}{=} \quad 1 = -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{aligned}$$

Damit bleibt als einzige Bedingung $x = y$. Somit ist f entlang dieser diagonalen komplex differenzierbar und die Ableitung ist

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\bigg|_{z=(a+ia)} = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{z=(a+ia)} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=(a+ia)} = 2a - i.$$

Da allerdings die Diagonale $\{x = y\}$ nicht offen ist, ist f auch nicht holomorph.

1.2 Differenzierbarkeit von $\log(z)$

Der komplexe Logarithmus $\log(z) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\log(z) = \log(|z|) + i(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k)$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist definiert als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(z)$, für die für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ die Beziehung $\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z)$ gilt.

i) Bestimmen Sie für $z \in \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_-\}$ die Ableitung von $\log(z)$.

ii) Begründen Sie kurz warum $\log(z)$ für $z \in \mathbb{R}_-$ nicht differenzierbar ist. Gibt es dennoch Teilmengen $G \subset \mathbb{C}$ auf denen die Funktionen holomorph ist?

Da $\log(z)$ auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ komplex differenzierbar ist und die Umkehrfunktion von $\exp(z)$, gilt für sie die Formel

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(f^{-1}(z))} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\exp}{\mathrm{d}z}(\log(z))} = \frac{1}{\exp(\log(z))} = \frac{1}{z}$$

in dieser Umgebung. $G = \mathbb{C}\backslash\{\mathbb{R}_-\}$ ist eine offene Umgebung, da $\mathbb{R}_-$ in $\mathbb{C}$ abgeschlossen ist und G somit als Komplement offen ist. Damit ist $\log(z)$ dort auch holomorph.
Betrachten wir nun $z \in \mathbb{R}_-\backslash\{0\}$ und den Hauptzweig von $\log(z)$ (k=0). Für $z = 0$ ist $\log(z)$ nicht definiert, da $\exp(z) \in \mathbb{C}^*$ ist. Entsprechend kann es auch keine Umkehrabbildung geben. Nun ist $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Damit ist $\log(z)$ an dieser Stelle unsteig und kann damit auch nicht differenzierbar sein: Versuchen wir die komplexe Ableitung am Punkt z einmal von $z' = e^{i\epsilon}z$ und $z' = e^{-i\epsilon}z$ zu bilden, so fällt natürlicherweise der Term $\log(|z|)$ weg, da $|e^{\pm i\epsilon}z| = |z|$ ist und nur die Argumentfunktionen bleiben übrig.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log(e^{i\epsilon}z) - \log(z)}{(e^{i\epsilon} - 1)z} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i\mathrm{Arg}(e^{i(\epsilon-\pi)}) - i\mathrm{Arg}(-1)}{(e^{i\epsilon} - 1)z} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i(-2\pi + \epsilon)}{(e^{i\epsilon} - 1)z} \to +\infty \\
\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\log(e^{-i\epsilon}z) - \log(z)}{(e^{-i\epsilon} - 1)z} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{i\mathrm{Arg}(e^{i(\pi-\epsilon)}) - i\mathrm{Arg}(-1)}{(e^{-i\epsilon} - 1)z} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{-i\epsilon}{(e^{-i\epsilon} - 1)z} \to \frac{-1}{|z|} = \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

Da die beiden Limites nicht übereinstimmen und der eine divergiert, ist dort die komplexe Ableitung auch nicht definiert.

1.3 Minima und Maxima holomorpher Funktionen

Sei $f : \overline{K_1(0)} \mapsto \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{K_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, die wie üblich durch Ihre Real- und Imaginärteile $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ausgedrückt wird.

i) Welche generelle Aussage knnen Sie über Position der globalen Minima und Maxima des Real- und Imaginärteils der Funktion treffen?

Schreibe $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Aufgrund der Holomorphie von f, sind u und v harmonische Funktionen, also $\Delta u = \Delta v = 0$. Diese haben i.A. keine lokalen Maxima und Minima, sondern nur Sattelpunkte. Auf einer kompakten Menge, wie $\overline{K_1(0)}$ können die globalen Maxima und Minima nur auf dem Rand $\partial\overline{K_1(0)}$ liegen.

2 Hausübungen:

2.1 Cauchy-Riemann Bedingungen als Einschränkungen an Real- und Imaginärteile

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion, deren Imagninärteil als bekannt $v(x,y) = e^{-y}\sin(x)$

i) Bestimmen Sie die Funktion $f(z)$

Betrachten wir die CR-Bedingungen, ergeben sich folgende Gleichungen und Lösungen für u(x,y):

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u = -e^{-y}\sin(x)\mathrm{d}x \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = e^{-y}\cos(x) + u_0(y) \\ \mathrm{d}u = -e^{-y}\cos(x)\mathrm{d}y \quad &\Rightarrow \quad u(x,y) = e^{-y}\cos(x) + u_0(x) \end{aligned}$$

Damit können wir f bis auf eine additive reelle Konstante u_0 als

$$f(x+iy) = e^{-y}\cos(x) + u_0 + ie^{-y}\sin(x) = e^{-y}e^{ix} + u_0 = e^{i(x+iy)} + u_0 = e^{iz} + u_0$$

schreiben. Diese ist natürlicherweise holomorph.

2.2 Holomorphe Funktionen

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ eine holomorphe Funktion

i) Beweisen Sie das $f^*(z^*)$ ebenfalls holomorph ist

ii) Beweisen Sie dass Divergenz und Rotation der reellen Vektorfelder $\vec{F}_R = u(x,y)\vec{e}_x - v(x,y)\vec{e}_y$ und $\vec{F}_I = v(x,y)\vec{e}_x + u(x,y)\vec{e}_y$ verschwinden.

Zunächst schreiben wir $g(z) = f^*(z^*)$ mithilfe von u und v als

$$g(x+iy) = f^*(x-iy) = u(x,-y) - iv(x,-y)$$

und überprüfen die CR-Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,-y)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) \quad &\stackrel{!}{=} \quad (-1)\cdot\frac{\partial(-v)}{\partial y}(x,-y) = \frac{\partial(-v(x,-y))}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x,-y)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) \quad &\stackrel{!}{=} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) = -\frac{\partial(-v(x,-y))}{\partial x}. \end{aligned}$$

Da beide erfüllt sind und die Ableitungen stetig sind, ist $g(z)$ holomorph.
Für die beiden Felder berechnen wir einfach Divergenz und Rotation. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall, ist die Rotation hier ein Skalar, weil die Rotationsachse immer aus der Ebene heraus zeigt:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\vec{F}_R) = \partial_x u - \partial_y v \quad &= \quad 0 \;\; \text{(1. CR-Bedingung)} \\ \mathrm{rot}(\vec{F}_R) = \partial_x v - (-\partial_y u) = \partial_x v + \partial_y u \quad &= \quad 0 \;\; \text{(2. CR-Bedingung)} \\ \mathrm{div}(\vec{F}_I) = \partial_x v + \partial_y u \quad &= \quad 0 \;\; \text{(2. CR-Bedingung)} \\ \mathrm{rot}(\vec{F}_I) = \partial_x u - \partial_y v \quad &= \quad 0 \;\; \text{(1. CR-Bedingung)} \end{aligned}$$

2.3 Minima und Maxima holomorpher Funktionen

Sei $f : \overline{K_1(0)} \mapsto \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{K_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, die wie üblich durch Ihre Real- und Imaginärteile $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ausgedrückt wird.

i) Bestimmen Sie für $f(z) = z^2 + z$ die globalen Minima und Maxima des Real- und Imaginärteils der Funktion.

Wie in 1.3 festgestellt wurde, befinden sich die globalen Minima und Maxima von f auf dem Rand von $\overline{K_1(0)}$. Daher beschrnken wir uns auf $z = e^{i\phi}$ und schreiben

$$f|_{\partial\overline{K_1(0)}}(e^{i\phi}) = (\cos(2\phi) + \cos(\phi)) + i(\sin(2\phi) + \sin(\phi)).$$

Betrachten wir zunaechst den Realteil, welchen wir nach ϕ ableiten um dort die lokalen Maxima und Minima zu finden. Dabei benutzen wir ein paar Additionstheoreme und kriegen

$$\partial_\phi(\cos(2\phi) + cos(\phi)) = -2\sin(2\phi) - \sin(\phi) = -4\cos(\phi)\sin(\phi) - \sin(\phi) = -\sin(\phi)(4\cos(\phi) + 1) \overset{!}{=} 0.$$

Dies ergibt als Lösungen $\phi = 0, \pi, \pm\arccos(-1/4)$. Für die zweite Ableitung erhalten wir

$$\partial_\phi^2(\cos(2\phi) + cos(\phi)) = -4\cos(2\phi) - \cos(\phi) = -8\cos^2(\phi) - \cos(\phi) + 4.$$

Für die ersten beiden Lösungen ist diese -5 und -3, was eindeutig auf Maxima hinweist. Für die anderen beiden kriegen wir $15/4$, welches auf Minima hinweist. Aufgrund der Symmetrie der Funktion, sind die beiden Minima gleichwertig und beide sind globale Minima. Bei den Maxima ergeben sich die Werte 2 und 0. Damit ist $\phi = 0$, welches $z = 1$ entspricht, das globale Maximum des Realteils.
Beim Imaginärteil bekommen wir auch mithilfe von Additionstheoremen für die erste Ableitung

$$\partial_\phi(\sin(2\phi) + \sin(\phi)) = 2\cos(2\phi) + \cos(\phi) = 4\cos^2(\phi) + \cos(\phi) - 2 \overset{!}{=} 0.$$

Dieses kann mithilfe der *pq*-Formel gelöst werden und wir erhalten 4 lokale Extrema

$$\phi = \pm\arccos\left(\frac{\pm\sqrt{33} - 1}{8}\right)$$

als Lösungen. Durch Vergleich der Funktionswerte von Im f

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f\left(\phi = \arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{33}+3}{4}\right) \\
\operatorname{Im} f\left(\phi = \arccos\left(\frac{-\sqrt{33}-1}{8}\right)\right) &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{33}-3}{4}\right) \\
\operatorname{Im} f\left(\phi = -\arccos\left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)\right) &= -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}-1}{8}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{33}+3}{4}\right) \\
\operatorname{Im} f\left((\phi = -\arccos\left(\frac{-\sqrt{33}-1}{8}\right)\right) &= \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{33}+1}{8}\right)^2}\left(\frac{\sqrt{33}-3}{4}\right),
\end{aligned}$$

erhalten wir als globales Maximum $\phi = \arccos(\frac{\sqrt{33}-1}{8})$ und globales Minimum $\phi = -\arccos(\frac{\sqrt{33}-1}{8})$.