Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 14:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Eigenschaften der Laplacetransformation

Sei $f(t)$ eine Funktionen deren Laplactransform durch $L[f(t)](p) = F(p)$ gegeben ist. Bestimmen Sie die Laplacetransformationen der Funktionen

i) $g(t) = e^{kt} f(t)$

ii) $h(t) = t^n f(t)$ mit $n \in \mathbb{N}$

iii) Benutzen Sie das Resultat aus i) oder ii) um zu zeigen dass $L[t^n e^{kt}](p) = \frac{n!}{(p-k)^{n+1}}$

Zu i): Unter Verwendung der Integraldarstellung ergibt sich

$$G(p) = L\left[e^{kt} f(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; e^{-pt} e^{kt} f(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; e^{-(p-k)t} f(t) = L\left[f(t)\right](p-k) = F(p-k).$$

Zu ii): Wir haben für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} H(p) &= L\left[t^n f(t)\right](p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; e^{-pt} t^n f(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t \; (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} e^{-pt} f(t) \\ &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} L\left[f(t)\right](p) = (-1)^n F^{(n)}(p). \end{aligned}$$

Zu iii): Wir benutzen, dass $L[1](p) = 1/p$, ii) und i) und bekommen

$$L\left[t^n e^{kt}\right](p) \overset{ii)}{=} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} L\left[e^{kt} \cdot 1\right](p) \overset{L[1](p),i)}{=} (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n} \frac{1}{p-k} = \frac{n!}{(p-k)^{n+1}},$$

da $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{1}{x} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$.

1.2 Inverse Laplacetransformation

Bestimmen Sie die inverse Laplacetransformation $f(t)$ der Funktion

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}, \qquad a \neq b$$

i) durch Partialbruchzerlegung und Verwendung bekannter Laplacetransformationen

ii) durch die explizite Integraldarstellung der inversen Laplacetransformation L^{-1}

iii) unter Benutzung des Konvolutionstheorems

Zu i): Zunächst verwenden wir die Partialbruchzerlegung

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} = \frac{A(s+b)+B(s+a)}{(s+a)(s+b)} = \frac{s(A+B)+(Ab+Ba)}{(s+a)(s+b)},$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich im Zähler

$$A+B=0 \;\wedge\; Ab+Ba=1 \;\Leftrightarrow\; B=-A \;\wedge\; A(b-a)=1 \;\Leftrightarrow\; A=\frac{1}{b-a}=-B.$$

bekommen. Dies sind konstante Vorfaktoren und da $L[e^{-xt}](s) = \frac{1}{s+x}$, haben wir aufgrund von Linearität von L

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right](t) = L^{-1}\left[\frac{1}{b-a}L[e^{-at}](s) + \frac{1}{a-b}L[e^{-bt}](s)\right](t) = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at}-e^{-bt}\right].$$

Zu ii): Wir nehmen ein $\gamma > (-a)$ und $\gamma > (-b)$:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)(s+b)}\right](t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathrm{d}s\ \frac{e^{st}}{(s+a)(s+b)}$$

Der Integrand hat zwei einfache Pole bei $s=(-a),(-b)$. Für $t>0$ können wir in negative reelle Richtung schließen und erhalten $2\pi i$ mal die beiden Residuen der beiden Pole in positiver Orientierung:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathrm{d}s\ \frac{e^{st}}{(s+a)(s+b)} &= \mathrm{Res}_{s=-a}\frac{e^{st}}{(s+a)(s+b)} + \mathrm{Res}_{s=-b}\frac{e^{st}}{(s+a)(s+b)} \\ &= \frac{e^{-at}}{b-a} + \frac{e^{-bt}}{a-b} = \frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right).\end{aligned}$$

Zu iii): Wir schreiben $F(s)$ als Produkt von Laplace-Transformierten

$$F(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)} = \frac{1}{s+a}\frac{1}{s+b} =: H(s)G(s).$$

Die Originalfunktionen kennen wir als $h(t)=e^{-at}$ und $g(t)=e^{-bt}$. Nun können wir die Rücktransformation von $F(s)$ als Faltung schreiben:

$$\begin{aligned}L^{-1}\left[H(s)G(s)\right](t) &= \int_0^t \mathrm{d}t'\ h(t')g(t-t') = \int_0^t \mathrm{d}t'\ e^{-at'}e^{-b(t-t')} \\ &= e^{-bt}\int_0^t \mathrm{d}t'\ e^{t'(b-a)} = \frac{e^{-bt}}{b-a}\left[e^{t(b-a)}-1\right] = \frac{1}{b-a}\left[e^{-at}-e^{-bt}\right].\end{aligned}$$

1.3 Integro-Differentialgleichungen mittels Laplacetransformation

Bestimmen Sie die Lösung der Integro-Differentialgleichung

$$\partial_t\phi(t) + a^2\int_0^t dt'\ e^{-2a(t-t')}\phi(t') = 0 \tag{1}$$

mit Anfangswert $\phi(t=0)=\phi_0$.

Zunächst schauen wir uns die Laplace-Transformation der zeitlichen Ableitung an. Wie in der Vorlesung gezeigt, haben wir

$$L[\partial_t\phi(t)](p) = -\phi(0) + p\Phi(p).$$

Das Integral in der Gleichung ist eine Faltung zwischen $g(t) = e^{-2at}$ und $\phi(t)$. Entsprechend kann die Laplacetransformation als Produkt der einzelnen Laplacetransformierten

$$L\left[\int_0^t dt'\; e^{-2a(t-t')}\phi(t')\right](p) = L\left[(g*\phi)(t)\right] = L[g(t)](p)L[\phi(t)](p) = L\left[e^{-2at}\right](p)\Phi(p) = \frac{\Phi(p)}{p+2a}$$

geschrieben werden. Damit ist die Laplacetransformation der gesamten Gleichung

$$-\phi(0) + p\Phi(p) + a^2\frac{\Phi(p)}{p+2a} = -\phi_0 + \frac{p^2+2ap+a^2}{p+2a}\Phi(p) = -\phi_0 + \frac{(p+a)^2}{p+2a}\Phi(p) \overset{!}{=} 0.$$

Nun können wir die Gleichung nach

$$\Phi(p) = \frac{\phi_0(p+2a)}{(p+a)^2}$$

umstellen. Unter Ausnutzung der Linearität von L^{-1} und $L[e^{-at}](p) = \frac{1}{p+a}$, ist die Rücktransformation

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= L^{-1}\left[\frac{\phi_0(p+2a)}{(p+a)^2}\right] \\
&= \phi_0 L^{-1}\left[\frac{(p+a+a)}{(p+a)^2}\right] = \phi_0 L^{-1}\left[\frac{1}{p+a} + \frac{a}{(p+a)^2}\right] \\
&= \phi_0\left(L^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] + aL^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^2}\right]\right) \\
&= \phi_0\left(L^{-1}\left[L\left[e^{-at}\right](p)\right] - a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}L^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right]\right) \\
&= \phi_0\left(e^{-at} - a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}e^{-at}\right) = \phi_0 e^{-at}\left(1+at\right).
\end{aligned}$$