Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 13:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Laplacetransformation

Bestimmen Sie die Laplacetransformationen der Funktionen

i) $\cosh(at)\cos(at)$

Zunächst einmal können wir die Funktion als Summe von Exponentialfunktionen schreiben.

$$\begin{aligned}\cosh(at)\cos(at) &= \frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2}\\ &= \frac{e^{at(1+i)}+e^{at(1-i)}+e^{at(-1+i)}+e^{at(-1-i)}}{4}\end{aligned}$$

Als nächstes betrachten wir die Laplace-Transformation für eine einzelne Exponentialfunktion.

$$\int_0^\infty dte^{at(1+i)}e^{-pt} = \int_0^\infty dte^{t[a(1+i)-p]} = \left[\frac{e^{t[a(1+i)-p]}}{a(1+i)-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a(1+i)}$$

Man beachte, dass hierbei $\mathrm{Re}(p) > a$ sein muss, damit das Integral existiert (und die obere Grenze keinen Beitrag liefert). Für die restlichen E-Funktionen ergibt sich ähnliches, allerdings ist hier die Bedingung für die Existenz der einzelnen Integrale nicht immer die gleiche. Wichtig ist für die Existenz des gesamten Integrals nur, dass es nicht schlimmer wird als die vorherig genannte. Somit erhalten wir

$$\cosh(at)\cos(at) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-a(1+i)}+\frac{1}{p-a(1-i)}+\frac{1}{p-a(-1+i)}+\frac{1}{p-a(-1-i)}\right).$$

Dies kann man jedoch noch weiter umformen

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p-a-ia}\frac{p+a+ia}{p+a+ia}+\frac{1}{p-a+ia}\frac{p+a-ia}{p+a-ia}+\frac{1}{p+a-ia}\frac{p-a+ia}{p-a+ia}+\frac{1}{p+a+ia}\frac{p-a-ia}{p-a-ia}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{p+a+ia}{p^2-a^2+a^2-2ia^2}+\frac{p+a-ia}{p^2-a^2-a^2+2ia^2+a^2}+\frac{p-a+ia}{p^2-a^2+2ia^2+a^2}+\frac{p-a-ia}{p^2-a^2-2ia^2+a^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2p}{p^2-2ia^2}+\frac{2p}{p^2+2ia^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2p(p^2+2ia^2)}{p^4+4a^4}+\frac{2p(p^2-i2a^2)}{p^4+4a^4}\right)\\
&= \frac{p^3}{p^4+4a^4}.\end{aligned}$$

ii) $\sinh(at)\sin(at)$

Hier können wir analog zum Aufgabenteil i) vorgehen.

$$\begin{aligned}\sinh(at)\sin(at) &= \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}\\ &= \frac{1}{4i}\left(e^{at(1+i)}-e^{at(1-i)}-e^{at(-1+i)}+e^{at(-1-i)}\right)\end{aligned}$$

Somit erhalten wir analog

$$\begin{aligned}\sinh(at)\sin(at) &= \frac{1}{4i}\left(\frac{1}{p-a(1+i)}-\frac{1}{p-a(1-i)}-\frac{1}{p-a(-1+i)}+\frac{1}{p-a(-1-i)}\right)\\ &= ....\\ &= \frac{2a^2p}{p^4+4a^4}.\end{aligned}$$

1.2 Formfaktor

Der Formfaktor einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ ist gegeben durch

$$F(\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\ \rho(\vec{x})\ e^{-i\vec{k}\vec{x}} \tag{1}$$

und kann in vielen Fällen durch Streuexperimente bestimmt werden.

i) Zeigen Sie zunächst, dass für eine kugelsymmetrischen Formfaktor $F(\vec{k}) = F(|\vec{k}|)$ die zugehörige Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$ durch

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ \frac{2\sin(k|\vec{x}|)}{k|\vec{x}|}\ k^2\ F(k)$$

gegeben ist.

Wenn der Formfaktor gegeben ist, erhalten wir im allgemeinen die Ladungsverteilung durch inverse Fouriertranformation des Formfaktors.

$$\rho(\vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}F(\vec{k})e^{ik\vec{x}}$$

Wenn wir nun den Fall betrachten, dass der Formfaktor lediglich vom Betrag von $\vec{k}$, den wir hier als k bezeichnen, abhängig ist, bemerken wir, dass dieser kugelsymmetrisch ist. Somit bietet es sich an Kugelkoordinaten zu betrachten. Da wir ohnehin über den ganzen k-Raum integrieren und wir somit die Orientierung des Koordinatensystems zum $\vec{x}$ frei wählen können, bietet es sich nun an eine Achse so zu wählen, dass sie in Richtung von $\vec{x}$ zeigt und somit $\vec{k}\vec{x} = kx\cos\theta_{kx}$ gilt. Damit erhalten wir dann

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dk\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi d\theta_{kx}\sin(\theta_{kx})k^2F(k)e^{ikx\cos(\theta_{kx})}.$$

Die Integration über φ liefert einfach einen Faktor 2 π. Für die letzte Rechnung führen die Substitution $s = \cos(\theta)$ ein. Für das Integrationsmaß gilt $ds = -\sin(\theta)d\theta$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k^2 F(k)\int_1^{-1} -ds\ e^{ikxs} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k^2 F(k)\int_{-1}^{1} ds\ e^{ikxs} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k^2 F(k)\left[\frac{e^{ikxs}}{ikx}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ k^2 F(k)\frac{2i\sin(kx)}{ikx}.
\end{aligned}$$

Was nach kürzen der i's und der Identifizierung von $x = |\vec{x}|$ dem gesuchten Ausdruck entspricht.

ii) Bestimmen Sie für $F(\vec{k}) = \frac{1}{1+a^2\vec{k}^2}$ mit $a > 0$ die zugehörige Ladungsverteilung $\rho(\vec{x})$

Da $F(\vec{k})$ nur von $\vec{k}^2$ abhängt, können wir die in i) hergeleitete Formel zur Berechnung der Ladungsverteilung verwenden.

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\ \frac{2k\sin(kx)}{x(1+a^2k^2)} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^\infty dk\ \frac{k\sin(kx)}{xa^2(k^2+\frac{1}{a^2})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^\infty dk\ \frac{k\sin(kx)}{xa^2(k-\frac{i}{a})(k+\frac{i}{a})}
\end{aligned}$$

Der Integrand besitzt also die Singularitäten $k = \pm i/a$. Wir suchen nun wie üblich eine Weg, der unsere Kontour schließt. Es bietet sich hier an den sin wieder durch Exponentialfunktionen auszudrücken.

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^\infty dk\ \frac{k\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right)}{2ixa^2(k-\frac{i}{a})(k+\frac{i}{a})}$$

Man muss nun unterscheiden wie man die Kontur schließt bei dem für die jeweilige Exponentialfuntkion. Da $x = |\vec{x}| > 0$ gilt, kann man leicht sehen, dass man für das positive Vorzeichen die Kontour über die obere Halbebene schließt und für das negative über die untere. Die zusätzlichen Kontouren liefern keinen Beitrag. Dementsprechend ist einmal der Pol bei $\frac{i}{a}$ und einmal der Pol bei $\frac{-i}{a}$ eingeschlossen (siehe Fig. 1). Nun müssen noch die beiden Residuen berechnet werden. Es handelt sich um zwei einfache Polstellen und Nenner und Zähler sind holomorph. Für die Berechnung der Ableitung bietet sich die Darstellungsweise des Nenners von oben an.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{k\to i/a}\left(\frac{ke^{ikx}}{2ix(1+k^2a^2)}\right) &= \frac{ke^{ikx}}{i4xka^2} = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{i4xa^2} \\
\mathrm{Res}_{k\to -i/a}\left(\frac{ke^{-ikx}}{2ix(1+k^2a^2)}\right) &= \frac{ke^{-ikx}}{i4xka^2} = \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{i4xa^2}
\end{aligned}$$

Dies können wir nun in den Residuensatz einsetzen.

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}) &= \frac{2\pi i}{(2\pi)^2}\left[\mathrm{Res}_{i/a}\left(\frac{k\left(e^{ikx}\right)}{2ix(1+k^2a^2)}\right) - (-1)\cdot\mathrm{Res}_{-i/a}\left(\frac{k\left(e^{-ikx}\right)}{2ix(1+k^2a^2)}\right)\right] \\
&= \frac{e^{-\frac{x}{a}}}{4\pi a^2 x}
\end{aligned}$$

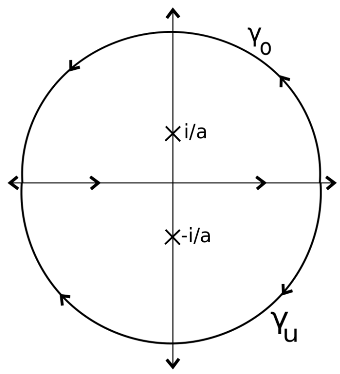

Fig. 1: Vervollständigung der Kontouren und Singularitäten.

1.3 Wellengleichung

Betrachten Sie die eindimensionale Wellengleichung

$$(\partial_t^2 - v^2 \partial_x^2)\phi(x,t) = 0 \; , \tag{2}$$

mit allgemeinen Anfangsbedingungen

$$\phi(x,t_0) = \phi_0(x) \; , \qquad \partial_t \phi(x,t)|_{t=t_0} = \pi_0(x) \; , \tag{3}$$

i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für die Fouriertransformierte $\tilde{\phi}(k,t)$

Für die Bewegungsgleichung transformieren wir die die Gleichung und nutzen die Regel für Ableitungen.

$$(\partial_t^2 + v^2 k^2)\tilde{\phi}(k,t) = 0$$

Dabei ist $\tilde{\phi}(k,t)$ gegeben durch

$$\tilde{\phi}(k,t) = \int dx \phi(x,t) e^{-ikx}$$

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\tilde{\phi}(k,t)$ der Bewegungsgleichung im Fourierraum

$$\partial_t^2 \tilde{\phi}(k,t) = -v^2 k^2 \tilde{\phi}(k,t)$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung lautet somit

$$\tilde{\phi}(k,t) = \tilde{A}(k) e^{ikvt} + \tilde{B}(k) e^{-ikvt}$$

iii) Bestimmen Sie für die Anfangsbedingungen in Gl. (3) die Lösung $\phi(x,t)$ im Ortsraum

Um die Lösung im Ortsraum auszurechnen, bestimmen wir zunächst die Lösung im Fourierraum und transformieren anschließend zurück.
Die Anfangsbedingungen im Fourierraum lauten

$$\tilde{\phi}(k, t_0) = \tilde{\phi}_0(k), \qquad \partial_t \tilde{\phi}(k,t)|_{t=t_0} = \tilde{\pi}_0(k)$$

Man kann das nun auch im Rahmen der allgemeinen Lösung ausdrücken

$$\tilde{\phi}(k, t_0) = \tilde{A}(k) e^{ikvt_0} + \tilde{B}(k) e^{-ikvt_0} \qquad \partial_t \tilde{\phi}(k, t_0) = ikv\tilde{A}(k) e^{ikvt_0} - ikv\tilde{B}(k) e^{-ikvt_0}$$

Somit lassen sich $\tilde{A}(k)$ und $\tilde{B}(k)$ durch

$$\begin{aligned} \tilde{A}(k) &= \frac{1}{2} e^{-ikvt_0} \left(\tilde{\phi}(k, t_o) + \frac{\partial_t \tilde{\phi}(k,t)|_{t=t_0}}{ikv} \right) & \tilde{B}(k) &= \frac{1}{2} e^{ikvt_0} \left(\tilde{\phi}(k, t_o) - \frac{\partial_t \tilde{\phi}(k,t)|_{t=t_0}}{ikv} \right) \\ \tilde{A}(k) &= \frac{e^{-ikvt_0}}{2} \left(\tilde{\phi}_0(k) + \frac{\pi_0(k)}{ikv} \right) & \tilde{B}(k) &= \frac{e^{ikvt_0}}{2} \left(\tilde{\phi}_0(k) - \frac{\pi_0(k)}{ikv} \right) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die allgemeine Lösung ein, kann man dies inverse Foruiertransformation anwenden, um die Lösung im Ortsraum zu erhalten. Man kann dabei die Exponentialterme direkt zusammenfassen.

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left(\tilde{\phi}_0(k) + \frac{\pi_o}{ikv} \right) e^{ik(x+v(t-t_0))} + \left(\tilde{\phi}_0(k) - \frac{\pi_0}{ikv} \right) e^{ik(x-v(t-t_0))}$$

Für die $\phi_0(k)$ steht dort einfach die inverse Fouriertransformation mit einer Translation. Folglich können wir schon

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2} \left[\phi_0(x+vt) + \phi_0(x-vt) \right] + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\pi_o(k)}{ikv} \left[e^{ik(x+v(t-t_0))} - e^{ik(x-v(t-t_0))} \right]$$

Um das letzte Integral weiter auszuwerten zu können, formen wir den letzten Term weiter um und stellen es als Integral dar.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\pi_o(k)}{ikv} \left[e^{ik(x+v(t-t_0))} - e^{ik(x-v(t-t_0))} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \pi_o(k) e^{ikx} \frac{e^{ikv(t-t_0)} - e^{-ikv(t-t_0)}}{ikv} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \pi_o(k) e^{ikx} \int_{t_0}^{t} dt' \; e^{ikv(t'-t_0)} + e^{-ikv(t'-t_0)} \end{aligned}$$

Nun können wir die Integrale vertauschen und die inverse Fouriertransformation ausführen.

$$\int_{t_0}^{t} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \pi_o(k) \left[e^{ik(x+v(t'-t_0))} + e^{ik(x-v(t'-t_0))} \right] = \int_{t_0}^{t} dt' \pi_0(x + v(t'-t_0)) + \pi_0(x - v(t'-t_0))$$

Dies kann man nun wieder in die Gleichung für $\phi(x,t)$ einsetzen und erhält als Lösung

$$\phi(x,t) = \frac{1}{2} \left[\phi_0(x+vt) + \phi_0(x-vt) \right] + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t} dt' \pi_0(x + v(t'-t_0)) + \pi_0(x - v(t'-t_0)).$$