Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 12:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fouriertransformation durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation

i) $f(x)$ ist reell genau dann wenn $\tilde{f}(-k) = \left(\tilde{f}(k)\right)^*$

ii) $f(x)$ ist rein imaginär genau dann wenn $\tilde{f}(-k) = -\left(\tilde{f}(k)\right)^*$

Zu i): Zunächst zeigen wir, dass

$$f(x) \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} \ \Rightarrow\ \left(\tilde{f}(k)\right)^* = \tilde{f}(-k)\ \forall k \in \mathbb{R}.$$

Dazu legen nehmen wir ein beliebiges $k \in \mathbb{R}$ und rechnen

$$\left(\tilde{f}(k)\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x)\right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{ikx} \left(f(x)\right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-i(-k)x} f(x) = \tilde{f}(-k)$$

da $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ reell ist. Umgekehrt zeigen wir, dass die Rücktransformation reell ist, wenn $\left(\tilde{f}(k)\right)^* = \tilde{f}(-k)\ \forall k \in \mathbb{R}$. Dazu betrachten wir die komplex konjugierte Rücktransformation für ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$\left(f(x)\right)^* = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{ikx} \tilde{f}(k)\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{-ikx} \left(\tilde{f}(k)\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{-ikx} \tilde{f}(-k).$$

Nun substituieren wir mit $k' = -k$:

$$\left(f(x)\right)^* = -\frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{d}k'\ e^{ik'x} \tilde{f}(k') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k'\ e^{ik'x} \tilde{f}(k') = f(x).$$

Wenn $(f(x))^* = f(x)$ ist, muss $\mathrm{Im}\, f(x) = -\mathrm{Im}\, f(x)$ für alle x sein. Damit ist $\mathrm{Im}\, f(x) = 0$ und damit $f(x)$ rein reell.
Zu ii): Hier können wir analog vorgehen und erhalten für rein imaginäres $f(x)$

$$\left(\tilde{f}(k)\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x)\right)^* = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{ikx} f(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-i(-k)x} f(x) = -\tilde{f}(-k).$$

Umgekehrt erhalten wir

$$\begin{aligned}(f(x))^* &= \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{ikx}\tilde{f}(k)\right)^* = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{-ikx}\left(\tilde{f}(k)\right)^* = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ e^{-ikx}\tilde{f}(-k) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{d}k'\ e^{ik'x}\tilde{f}(k') = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k'\ e^{ik'x}\tilde{f}(k') = -f(x).\end{aligned}$$

Mit $(f(x))^* = -f(x)$ haben wir $\mathrm{Re}\ f(x) = -\mathrm{Re}\ f(x) = 0$, womit $f(x)$ rein imaginär ist.

1.2 Fouriertransformationen und komplexe Kontourintegration

Bestimmen Sie

i) Die Fouriertransformation der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$,

ii) Die Inverse Fouriertransformation der Funktion $\tilde{g}(k) = \frac{i}{E-k+i\Gamma}$ für $E > 0$ und $\Gamma > 0$

Zu i): Wir haben

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Hier substituieren wir $x' = x - x_0$ und erhalten

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\ e^{-ik(x'+x_0)}e^{-\frac{x'^2}{2\sigma^2}} = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'\ e^{-\left(\frac{x'^2}{2\sigma^2}+ikx'\right)}$$

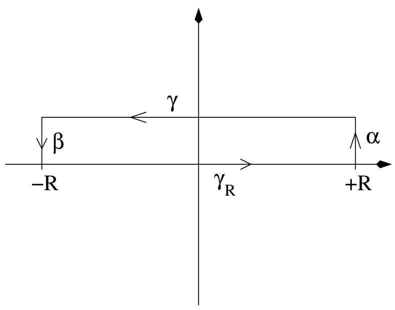
Nun machen wir eine weitere Ersetzung $\tilde{x} = \frac{x'}{\sqrt{2}\sigma}$ und ergänzen quadratisch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(k) &= \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}\ e^{-\left(\tilde{x}^2+ik\sqrt{2}\sigma\tilde{x}\right)} \\ &= \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}\ e^{-\left(\tilde{x}^2+ik\sqrt{2}\sigma\tilde{x}-\frac{k^2\sigma^2}{2}+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right)} \\ &= \frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\tilde{x}\ e^{-\left(\tilde{x}+\frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2},\end{aligned}$$

welches nach weiterem Ersetzen $z = \tilde{x} + \frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}$ zu

$$\tilde{f}(k) = \frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty+\frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}}^{+\infty+\frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z e^{-z^2} = \frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R+\frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}}^{+R+\frac{ik\sigma}{\sqrt{2}}} \mathrm{d}z\ e^{-z^2} =: -\frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma(R)} \mathrm{d}z\ e$$

wird. Nun wollen wir zeigen, dass dies dasselbe ergibt, wenn wir entlang der reellen Achse $\gamma_{\mathbb{R}}$ integrieren:



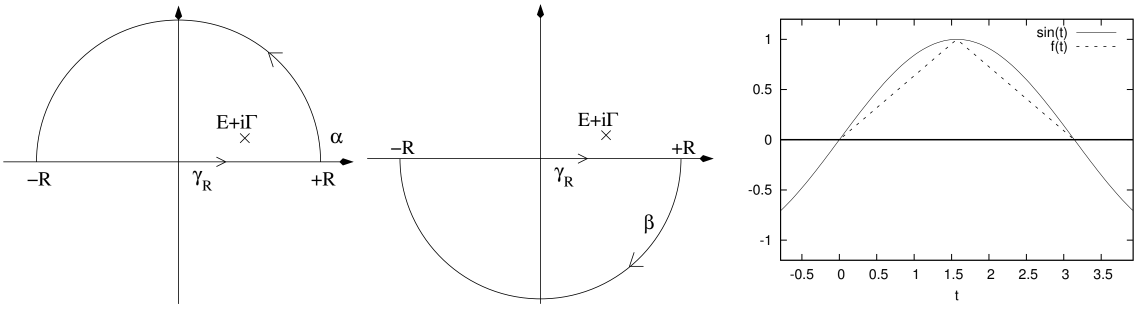


Fig. 1: Die mögliche Kontour für $x > 0$, $x < 0$ und die Unterschätzfunktion $f(t)$ für den Sinus.

Der Integrand e^{-z^2} ist holomorph, weshalb das Integral über die geschlossenen Kontour $\gamma_{\mathbb{R}}(R)+\alpha(R)+\gamma(R)+\beta(R)$ Null ist. Wir müssen nur zeigen, dass für $R \to +\infty$ das Integral entlang von $\alpha(R)+\beta(R)$ Null ist. Wir parametrisieren $\alpha(R)$ mit $z(t) = R + ik\sigma t$ und $\beta(R)$ mit $z(t) = -R + ik\sigma(1-t)$.

$$\lim_{R\to+\infty}\left[\int_{\alpha(R)} \mathrm{d}z\ e^{-z^2} + \int_{\beta(R)} \mathrm{d}z\ e^{-z^2}\right] = i\gamma \lim_{R\to+\infty}\int_0^1 \mathrm{d}t\ \left[e^{-(R+ik\sigma t)^2} - e^{-(R-ik\sigma(1-t))^2}\right]$$

Für den zweiten Term können wir mit $(1-t)$ substituieren. Die vertauschten Grenzen werden durch das Minus im Integrationsmaß wieder vertauscht und wir haben dasselbe Integral ohne $(1-t)$. Nun können wir die Terme in der Exponentialfunktion ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} i\gamma \lim_{R\to+\infty}\int_0^1 \mathrm{d}t\ \left[e^{-(R+ik\sigma t)^2} - e^{-(R-ik\sigma t)^2}\right] &= i\gamma \lim_{R\to+\infty} e^{-R^2}\int_0^1 \mathrm{d}t\ e^{k^2\sigma^2 t^2}\left[e^{-i2kR\sigma t} - e^{i2kR\sigma t}\right] \\ &= 2\gamma \lim_{R\to+\infty} e^{-R^2}\int_0^1 \mathrm{d}t\ e^{k^2\sigma^2 t^2}\sin(2kR\sigma t) = 0, \end{aligned}$$

da das Integral betragsmäßig durch $e^{k^2\sigma^2}$ beschränkt ist. Damit haben wir

$$\tilde{f}(k) = \frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}} \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_{\mathbb{R}}(R)} \mathrm{d}z\ e^{-z^2} = \frac{e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = e^{-ikx_0}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}.$$

Zu ii): Die inverse Fouriertransformation von $\tilde{g}(k)$ ist

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ \frac{ie^{ikx}}{E-k+i\Gamma} = -\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ \frac{e^{ikx}}{k-(E+i\Gamma)}.$$

Da $E, \Gamma > 0$, haben wir einen einfachen Pol in der oberen komplexen Halbebene. Für $x > 0$ können wir die Kontour entlang der reellen Achse *nach oben* hin schließen, da wir das Integral entlang des Bogens α abschätzen können. Wir parametrisieren mit $k(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty}\left|\int_\alpha \mathrm{d}k\ \frac{e^{ikx}}{k-(E+i\Gamma)}\right| &= \lim_{R\to+\infty}\left|\int_0^\pi \mathrm{d}t\ \frac{iRe^{it}e^{ixRe^{it}}}{Re^{it}-(E+i\Gamma)}\right| \\ &\lesssim \lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi \mathrm{d}t\ \left|\frac{Re^{ixRe^{it}}}{R}\right| \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi \mathrm{d}t\ \left|e^{-xR\sin(t)}e^{ixR\cos(t)}\right| \\ &= \lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi \mathrm{d}t\ e^{-xR\sin(t)}. \end{aligned}$$

Um dieses Integral abzuschätzen, können wir $\sin(t)$ mit einer Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}t & ,t \in [0, \pi/2) \\ -\frac{2}{\pi}t + 2 & ,t \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

unterschätzen, womit $e^{-xR\sin(t)} \leq e^{-xRf(t)}$ ist. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t\ e^{-xR\sin(t)} &\leq \lim_{R\to+\infty} \int_0^{\pi} \mathrm{d}t\ e^{-xRf(t)} = \lim_{R\to+\infty} \left[\int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t\ e^{-\frac{2xR}{\pi}t} + e^{-2xR} \int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{d}t\ e^{\frac{2xR}{\pi}t} \right] \\
&= \lim_{R\to+\infty} \left[- \left. \frac{\pi e^{-\frac{2xR}{\pi}t}}{2xR} \right|_{t=0}^{t=\pi/2} + e^{-2xR} \left. \frac{\pi e^{\frac{2xR}{\pi}t}}{2xR} \right|_{t=\pi/2}^{t=\pi} \right] \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{2xR} \left[1 - e^{-xR} + e^{-2xR} \left(e^{2xR} - e^{xR} \right) \right] \\
&= \lim_{R\to+\infty} \frac{\pi}{xR} \left[1 - e^{-xR} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Damit haben wir für $x > 0$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ \frac{e^{ikx}}{k - (E + i\Gamma)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\mathbb{R}}+\alpha} \mathrm{d}k\ \frac{e^{ikx}}{k - (E + i\Gamma)} = e^{ix(E+i\Gamma)} = e^{-\Gamma x} e^{iEx}.$$

Für $x = 0$ können wir einfach integrieren und erhalten

$$g(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\ \frac{1}{k - (E + i\Gamma)} = \frac{1}{2\pi i} \log\left(k - (E + i\Gamma)\right)\Big|_{k=-\infty}^{k=+\infty} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Arg}\left((k - E) - i\Gamma\right)\Big|_{k=-\infty}^{k=+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Für $x < 0$ schliessen wir *nach unten*, wo wir den Bogen β analog abschätzen können. Da der Integrand in der unteren Halbebene holomorph ist, ist das Integral Null. Insgesamt ist dann

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\Gamma x} e^{iEx} & ,x > 0 \\ \frac{1}{2} & ,x = 0 \\ 0 & ,x < 0. \end{cases}$$

2 Hausübungen:

2.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fouriertransformation durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation bezüglich

i) Translation: $\mathcal{F}[f(x+y)](k) = e^{iky}\tilde{f}(k)$

ii) Skalierung: $\mathcal{F}[f(\alpha x)](k) = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}(k/\alpha)$

Zu i): Wir betrachten für festes $y \in \mathbb{R}$ und berechnen

$$\mathcal{F}[f(x+y)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(x+y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(x+y)\ e^{-ik(x+y)} e^{iky} f(x+y) = e^{iky}\tilde{f}(k).$$

Zu ii): Für ein $\alpha > 0$ haben wir

$$\mathcal{F}[f(\alpha x)](k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} f(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}(\alpha x)\ e^{-i\frac{k}{\alpha}(\alpha x)} f(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}(\frac{k}{\alpha}).$$

2.2 Fouriertransformationen und Parseval relation

i) Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x) = \theta(x+1)\theta(1-x)$.

ii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und die aus der Vorlesung bekannte Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\ |\tilde{f}(\omega)|^2$$

um das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ zu bestimmen.

Zu i): Die Fouriertransformation ist

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ e^{-ikx}\theta(x+1)\theta(1-x) = \int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ e^{-ikx} = -\left.\frac{e^{-ikx}}{ik}\right|_{x=-1}^{x=+1} = \frac{e^{ik}-e^{-ik}}{ik} = \frac{2\sin(k)}{k}.$$

Zu ii): Wir haben aufgrund der Parsevalrelation

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \frac{\sin^2(t)}{t^2} = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ \left|\frac{2\sin(t)}{t}\right|^2 \\ &\overset{\text{Parseval, } i)}{=} \frac{\pi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\ |\theta(x+1)\theta(1-x)|^2 = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{+1} \mathrm{d}x\ = \pi. \end{aligned}$$

2.3 Lösung gewöhnlicher Differentialgleichung mittels Fouriertransformation

Betrachten Sie die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right)\phi(t) = f(t) \tag{1}$$

der durch eine Kraft $f(t)$ angetrieben wird.

i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\tilde{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \phi(t)e^{-i\omega t}$ indem Sie Gl. (1) Fouriertransformieren

ii) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegunsgleichung für $\tilde{\phi}(\omega)$

iii) Bestimmen Sie für den Spezialfall $f(t) = 2\pi\delta(t)$ eine Lösung $\phi(t)$ als Funktion der Zeit indem Sie die Inverse Fouriertransformation ausführen

Zu i): Wir haben

$$\mathcal{F}\left[\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right)\phi(t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[f(t)\right](\omega) = \tilde{f}(\omega).$$

Auf der linken Seite haben wir

$$\mathcal{F}\left[\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right)\phi(t)\right](\omega) = \left((i\omega)^2 + (i\omega)\gamma + \omega_0^2\right)\tilde{\phi}(\omega),$$

womit wir als Bewegungsgleichung

$$\left(-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2\right)\tilde{\phi}(\omega) \overset{!}{=} \tilde{f}(\omega)$$

erhalten.

Zu ii):

$$\tilde{\phi}(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)}{-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2}$$

Zu iii): Zunächst erhalten wir als Fouriertransformierte von $f(t) = 2\pi\delta(t)$

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t\ e^{-i\omega t} 2\pi\delta(t) = 2\pi.$$

Als nächstes setzen wir das in $\tilde{\phi}(\omega)$ ein und machen die inverse Transformation

$$\phi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ \frac{2\pi e^{i\omega t}}{-\omega^2 + i\omega\gamma + \omega_0^2} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega\ \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega\gamma - \omega_0^2},$$

wobei wir den Nenner über quadratische Ergänzung zu

$$\omega^2 - i\gamma\omega - \omega_0^2 = \left(\omega - \frac{i\gamma}{2}\right)^2 - \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) = \left(\omega - \frac{i\gamma}{2} - \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)\left(\omega - \frac{i\gamma}{2} + \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}\right)$$

umschreiben. Damit hat der Integrand für $\omega_0 \neq \gamma/2$ zwei einfache Pole bei $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} + i\frac{\gamma}{2}$, welche beide in der oberen Halbebene liegen. Sie tragen nur bei, wenn wir den Pfad *nach oben* hin schließen können, was bei $t > 0$ der Fall ist. Dazu können wir den oberen Bogen abschätzen, welchen wir mit $\omega(x) = Re^{ix},\ x \in [0, \pi]$ parametrisieren:

$$\begin{aligned}\lim_{R\to+\infty}\left|\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \frac{i\omega(x)e^{i\omega(x)t}}{\omega(x)^2 - i\omega(x)\gamma - \omega_0^2}\right| \quad &\lesssim \quad \lim_{R\to+\infty}\int_0^\pi \mathrm{d}x\ \frac{Re^{-Rt\sin(x)}}{R^2} \\ &= \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^\pi \mathrm{d}x\ e^{-Rt\sin(x)} \leq \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{R} = 0.\end{aligned}$$

Hier war für die Abschätzung des letzten Integrals wichtig, dass $t > 0$ ist. Analog kann der Bogen in die untere Halbebene für $t < 0$ abgeschätzt werden. Dort haben wir keine Pole und entsprechend ist dort $\phi(t) = 0$. Die Residuen der beiden Pole sind

$$\mathrm{Res}_{\left(\omega=\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}+i\frac{\gamma}{2}\right)}\ \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega\gamma - \omega_0^2} = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{i\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}},$$

$$\mathrm{Res}_{\left(\omega=-\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}+i\frac{\gamma}{2}\right)} \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega\gamma - \omega_0^2} = \frac{-e^{-\frac{\gamma}{2}t}e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t}}{2\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}}.$$

Damit haben wir für $t > 0$

$$\phi(t) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{e^{i\omega t}}{\omega^2 - i\omega\gamma - \omega_0^2} = \frac{-2\pi i e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{2\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}} \left(e^{i\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t} - e^{-i\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t} \right) = \frac{2\pi e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}} \sin(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t)$$

was wir insgesamt für $\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} > 0$ als

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{2\pi e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}} \sin(\sqrt{\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{4}}t) & ,t > 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

schreiben können. Für $\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} < 0$ haben wir den Fall von Überdämpfung und wir erhalten

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{2\pi e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}} \sinh(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}t) & ,t > 0 \\ 0 & ,t < 0. \end{cases}$$

Für $\omega_0^2 = \gamma^2/4$ tritt der aperiodische Grenzfall ein, der hier nicht weiter erörtert wird.