Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 –Musterlösung zum Übungszettel 11:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Dirac δ Distribution und Hauptwerte

i) Zeigen Sie dass $\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x-i\epsilon} = P\frac{1}{x} + i\pi\delta(x)$, indem Sie für eine holomorphe Funktion $f(z)$ das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{f(x)}{x-i\epsilon}$ bestimmen.

Durch das Aufspalten des Integrals in die Regionen nahe $x = 0$ und ausserhalb erhalten wir

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{f(x)}{x-i\epsilon} \quad = \quad \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x)}{x-i\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x)}{x-i\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)}{x-i\epsilon}$$

Dann gilt

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x)}{x-i\epsilon} + \lim_{\delta\to 0}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x)}{x-i\epsilon} = \lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{-\delta}\frac{f(x)}{x} + \lim_{\delta\to 0}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x)}{x} = P\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{f(x)}{x},$$

da Aufgrund der Abwesenheit einer Singularität der Limes $\lim_{\epsilon\to 0}$ einfach in das Integral reingezogen werden kann. In der Nähe von $x = 0$ ist dies nicht so einfach möglich. Allerdings können wir auf diesem Integral unsere Funktion in eine Taylor-Reihe 1. Ordnung entwickeln.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(x)}{x-i\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(0)+xf'(0)}{x-i\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(0)}{x-i\epsilon} + \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{xf'(0)}{x-i\epsilon} \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta}\frac{f(0)}{x-i\epsilon} + \lim_{\delta\to 0}\int_{-\delta}^{\delta} f'(0) = \lim_{\epsilon\to 0} f(0)\Big[\log(x-i\epsilon)\Big]_{x=-\delta}^{x=+\delta} + \mathcal{O}(\delta) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} f(0)\left[\log(|\delta-i\epsilon|) - \log(|-\delta-i\epsilon|) + i\arg(\delta-i\epsilon) - i\arg(-\delta-i\epsilon)\right] \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\lim_{\delta\to 0} f(0)\left[i\arg(\delta-i\epsilon) - i\arg(-\delta-i\epsilon)\right] = f(0)\Big(0-(-\pi)\Big) = i\pi f(0)\ ,
\end{aligned}$$

Hier sei bemerkt, dass beim vorletzten Umformungsschritt der $\lim_{\delta\to 0}$ keine Rolle mehr spielt. Außerdem bekommt man $-\pi$, weil man sich im $\lim_{\epsilon\to 0}$ von unten der negativen reellen Achse nähert.
Damit gilt $\lim_{\epsilon\to 0}\int\frac{1}{x-i\epsilon} = P\int\frac{1}{x} + i\pi f(0)$.
Neben der expliziten Berechnung kann das Ergebnis z.B. auch durch Umschreibung erhalten

$$\frac{1}{x-i\epsilon} = \frac{1}{x-i\epsilon}\frac{x+i\epsilon}{x+i\epsilon} = \frac{x}{x^2+\epsilon^2} + i\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$$

so dass im limes $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{x}{x^2+\epsilon^2} &= \frac{1}{x}\ ,\\ \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2} &= \pi\delta(x)\ ,\end{aligned}$$

ebenso das gewünschte Ergebnis liefert.

1.2 Fourierreihen

Bestimmen Sie die Darstellungen der periodische fortgesetzten Funktionen $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ als trigonometrische Reihe und als Fourierreihe

i) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Für die weitere Berechnung schreiben wir $f(x)$ mit Hilfe der Eulerschen Identität zunächst um.

$$\sin(x)\cos(x) = \frac{e^{i\pi x} - e^{-i\pi x}}{2i}\frac{e^{i\pi x} + e^{-i\pi x}}{2} = \frac{e^{i2\pi x} + 1 - 1 - e^{-i2\pi x}}{4i} = \frac{\sin(2x)}{2}$$

An dieser Stelle kann man schon bemerken, dass es sich bei $\sin(2x)$ um einen der orthonormalen Basisvektoren der trigonometrischen Reihe handelt und deshalb nur das entsprechende Gewicht von 0 verschieden sein kann und insbesondere $b_2 = \frac{1}{2}$.
Aber schauen wir uns das genauer an.

$$\begin{aligned}a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2x)\cos(kx)}{2}dx\\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2x)\sin(kx)}{2}dx\end{aligned}$$

Bei den a_k handelt es sich um Integrale einer antisymmetrischen Funktion (antisymmetrisch mal symmetrisch $\to$ antisymmetrisch) über ein symmetrisches Intervall, weshalb diese 0 ergeben.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(2x)\sin(kx)}{2}$$

Da $k \in \mathbb{Z}$ und $2 \in \mathbb{Z}$ kann die Orthogonalitätsbedingung aus der Vorlesung verwendet werden. Für die Berechnung der Koeffizienten der Fourierreihe benutzt man dann die Relation zwischen den Koeffizienten und erhält $c_2 = \frac{-i}{4}$ und $c_{-2} = \frac{i}{4}$ und 0 sonst.

$$\begin{aligned}\text{trigonometrische Reihe}:\ f(x) &= \frac{\sin(2x)}{2}\\ \text{Fourierreihe}:f(x) &= \frac{e^{2ik}}{4i} - \frac{e^{-2ik}}{4i}\end{aligned}$$

ii) $g(x) = |x|$ Zunächst bemerken wir, dass es sich um eine symmetrische Funktion handelt. Deshalb sollte das Berechnen der a_k genügen. Beginnen wir mit a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|x|}{\sqrt{2}}dx \overset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos(kx)dx = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} x\cos(kx)dx = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\sin(kx)x}{k}\Big]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}dx$$
$$= -\frac{2}{\pi}\Big[\frac{-\cos(kx)}{k^2}\Big]_0^{\pi} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi k^2} & \text{k ungerade} \\ 0 & \text{k gerade} \end{cases}$$

Die Koeffizienten der Fourier-Reihe erhalten wir wieder durch die Relation der Koeffizienten. Daher ist $c_k = -\frac{2}{\pi k^2} \forall\ k$ ungerade und $c_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{trigonometrische Reihe}: \ f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k+1)^2}\cos((2k+1))$$
$$\text{Fourierreihe}: f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k+1)^2}e^{i(2k+1)x}$$

2 Hausübungen:

2.1 Dirac δ Distribution

Bestimmen Sie das Integral

i)
$$\int_a^b f(x)g(x-a)\delta(x-c)$$

Die Auswertung liefert uns f(c)g(c-a) nur, wenn $c \in [a,b]$ (o.b.d.A $b \geq a$). Daher können wir das Ergebnis auch wie folgt schreiben.

$$\int_a^b f(x)g(x-a)\delta(x-c) = f(c)g(c-a)\theta(c-a)\theta(b-c)$$

2.2 Fourierreihen

Bestimmen Sie die Darstellungen der periodische fortgesetzten Funktionen $f, g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ als trigonometrische Reihe und als Fourierreihe

i) $f(x) = \sin(\pi x)\cos(4\pi x)$,

Vorbemerkung zur Reskalierung:

Betrachten wir die Streckung von $f(x)$ um π: $f_1(x) \to f_\pi\left(\frac{x}{\pi}\right)$. Dann ist f_π periodisch auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ und wir können die gewohnten Gleichungen zu Berechnung der Koeffizienten verwenden. Am Ende müssen wir, um das Ergebnis für $f_1(x)$ zu erhalten, die Streckung wieder rückgängig machen. Deshalb führen wir eine Substitution ein. Sei also $y = \pi x \Leftrightarrow x = \frac{y}{\pi}$. Dann gilt

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\cos(ky)dy$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\sin(ky)dy$$

Damit wir wieder eine Gleichung in x bekommen, substituieren wir zurück.

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\cos(ky)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)\pi dx = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(k\pi x)dx \quad (1)$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\sin(ky)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)\pi dx = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(k\pi x)dx \quad (2)$$

Wir bemerken also, dass wir nun in sin und cos, die um π gestaucht sind, entwickeln. Mit anderen Worten, wir entwickeln in Sinus und Cosinus Funktionen, die auf dem Intervall $[-1, 1]$ periodisch sind. Außerdem bekommt das Skalarprodukt anderer Grenzen und einen anderen Normierungsfaktor.

zu i):

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Funktion $f(x)$ antisymmetrisch ist und eine Substitution nichts daran ändert. Die Integrale gehen über ein symmetrisches Intervall und da die Multiplikation mit $\cos(ky)$ die Symmetrie nicht ändert sind die $a_k = 0$. Wir brauchen also nur die b_k betrachten. Bevor wir nun f(x) einsetzen formen wir dieses noch einmal um

$$f(x) = \sin(\pi x)\cos(5\pi x) = \frac{e^{i5\pi x} + e^{i3\pi x} - e^{-i3\pi} - e^{-i5\pi}}{4i} = \frac{\sin(5\pi x) - \sin(3\pi x)}{2}.$$

Nun können wir sehen, dass es sich hierbei um 2 Vektoren unserer Orthonormalbasis handelt (d.h hier steht im Grunde schon die trigonometsiche Reihe). Zur Veranschaulichung betrachten wir noch einmal

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{y}{\pi}\right)\sin(ky)dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(5y) - \sin(3y)}{2}\sin(ky)dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} \sin(5y)\sin(ky)dy - \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3y)\sin(ky)dy\Big). \end{aligned}$$

Auf beide Teile können wir die Orthogonalitätsbeziehung aus der Vorlesung anwenden und erhalten letztlich $b_5 = \frac{1}{2}$ und $b_3 = -\frac{1}{2}$.

Für die Koeffizienten der Fourierreihe können wir wieder die bekannten Beziehungen nutzen und erhalten $c_5 = -i\frac{1}{4}$, $c_{-5} = i\frac{1}{4}$, $c_3 = i\frac{1}{4}$ und $c_{-3} = -i\frac{1}{4}$. Hierzu ist zu bemerken, dass die Basisvektoren $e^{i\pi kx}$ sind.

$$\begin{aligned} \text{trigonometrische Reihe}: f(x) &= \frac{\sin(5\pi y)}{2} - \frac{\sin(3\pi y)}{2} \\ \text{Fourierreihe}: f(x) &= \frac{-ie^{i5\pi x}}{4} + \frac{ie^{-i5\pi x}}{4} + \frac{ie^{i3\pi x}}{4} + \frac{-ie^{-i3\pi x}}{4} \end{aligned}$$

ii) $g(x) = x^2$

Hierfür können wir die Gleichung (1) benutzten (offensichtlich mit g(x) statt f(x). Wir schauen uns wieder die Symmetrie der Funktion g(x) an. Es handelt sich um eine symmetrische Funktion $\rightarrow b_k = 0$.

$$a_0 = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{2}}dx = \Big[\frac{1}{3\sqrt{2}}x^3\Big]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^{1} x^2\cos(k\pi x)dx = \left[x^2\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2x\frac{\sin(k\pi x)}{k\pi} \\ &= \left[2x\frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2\left(-\frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right) = \left[2x\frac{\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}\right]_{-1}^{1} - \left[2\frac{\sin(k\pi x)}{k^3\pi^3}\right]_{-1}^{1} \\ &= \begin{cases} \frac{-4}{k^2\pi^2} & \text{k ungerade} \\ \frac{4}{k^2\pi^2} & \text{k gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Fourier-Reihe erhalten wir dann wie üblich $c_k = \frac{a_k}{2}$.

$$\text{trigonometrische Reihe : } f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4\cos(k\pi x)}{k^2\pi^2}$$
$$\text{Fourierreihe :} f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{2e^{ik\pi x}}{k^2\pi^2}$$

2.3 Fourierdarstelleung der Dirac δ-Distribution

i Bestimmen Sie die Fourierdarstellung $D(x)$ der Dirac δ-Distribution $\delta(x)$ auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} e^{-ik0} = \frac{1}{2\pi}$$

Die Fourierdarstellung ist folglich

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikx}$$

ii) Zeigen Sie dass für eine periodische Testfunktion $f(x) = \sum_k c_k e^{ikx}$ gilt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D(x) = f(0)$$

Entsprechend der Darstellung als Fourierreihe ist $f(0) = \sum_k c_k$. Zur Lösung setzten wir einfach D(x) und f(x) ein.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) D(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k c_k e^{ikx} \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{ijx} dx \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_k c_k \frac{1}{2\pi} \sum_j e^{i(k+j)x} dx \\
&= \sum_k c_k \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+j)x} dx
\end{aligned}$$

Nach der Vorlesung gilt $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+j)x} = \delta_{k,-j}$. Damit gilt dann

$$\sum_k c_k \sum_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+j)x} dx = \sum_k c_k \sum_j \delta_{k,-j} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k = f(0)$$