Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Musterlösung zum Übungszettel 1:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

1 Präsenzübungen:

1.1 Elementare Operation mit komplexen Zahlen

Beweisen Sie folgende Identitäten für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

i) $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$

Zur Lösung dieses Problems können wir die zwei allgemeine Komplexe Zahlen in kartesischen Koordinaten wählen und die Multiplikation durchführen.

Schreiben wir $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$, wobei a,b,c,d $\in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(z_1 z_2)^* &= ((a+ib)(c+id))^* = (ac + iad + ibc - bd)^* = ac - iad - ibc - bd \\ &= a(c - id) - ib(c - id) = (a - ib)(c - id) = z_1^* z_2^*\end{aligned}$$

Das ganze kann natürlich auch in Polarkoordinaten ausgerechnet werden. Dazu führt man sich zunächst einmal vor Augen, welchen Einfluss die komplexe Konjugation auf die komplexe Exponentialfunktion hat. Sei $\varphi \in \mathbb{R}$.

$$\exp(i\varphi)^* = (\cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi))^* = \cos(\varphi) - i\,\sin(\varphi) = \cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi) = \exp(-i\varphi)$$

Dazu hat man die Symmetrien der cos- und sin-Funktion ausgenutzt. Nun stellt man die beiden komplexen Zahlen in Polarkoordinaten dar, dh. $z_1 = r_1\,\exp(i\varphi_1) \quad z_2 = r_2\,\exp(\varphi_2)$.

$$(z_1 z_2)^* = (r_1 r_2\,\exp(i(\varphi_1 + \varphi_2)))^* = r_1 r_2\,\exp(-i(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2\,\exp(-i\varphi_1)\,\exp(-i\varphi_2) = z_1^* z_2^*$$

ii) $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Wie oben die Polarkoordinaten verwenden und das ganze durchrechnen.

$$\arg(z_1/z_2) = \arg\left(\frac{r_1}{r_2}\frac{\exp(i\varphi_1)}{\exp(i\varphi_2)}\right) = \arg\left(\frac{r_1}{r_2}\,\exp(i(\varphi_1 - \varphi_2))\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

iii) $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)$

Wir verwenden die Darstellung durch die komplexe Exponentialfunktion

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\varphi_1+\varphi_2) &= 1/2\exp(i(\varphi_1+\varphi_2)) + 1/2\exp(-i(\varphi_1+\varphi_2))\\
&= 1/2\exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2) + 1/2\exp(-i\varphi_1)\exp(-i\varphi_2)\\
&= 1/2\exp(i\varphi_1)\exp(i\varphi_2) + c.c(\text{complex conjugate})\\
&= 1/2(\cos(\varphi_1)+i\sin(\varphi_1))(\cos(\varphi_2)+i\sin(\varphi_2)) + c.c.\\
&= 1/2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+i\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + c.c.\\
&= 2*\Re(1/2(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)+i\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2)+i\cos(\varphi_2)\sin(\varphi_1)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)))\\
&= \cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2)-\sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)
\end{aligned}
$$

1.2 Darstellung komplexer Abbildungen

i) Bestimmen Sie für $f(z) = z^3$ und $g(z) = i\bar{z}$ die Abbildung der Punkte $z_\pm = (1 \pm i)/\sqrt{2}$ und visualisieren Sie deren Abbildung in der komplexen Ebene.

Schreibe z zunächst in Polarkoordinaten $z = 1\ \exp(\pm i\pi/4)$. Dann ergibt sich

$f(z_\pm) = \exp(\pm i\pi/4)^3 = exp(\pm i3\pi/4)$

$g(z_\pm) = i\exp(\mp i\pi/4) = \exp(i\pi/2)\exp(\mp i\pi/4)$

Das heißt

$g(z_+) = \exp(i\pi/2)\exp(-i\pi/4) = \exp(i\pi/4)$

$g(z_-)\exp(i\pi/2)\exp(i\pi/4) = \exp(i3\pi/4)$

ii) Bestimmen Sie den Bildbereich der Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ für die Abbildung des ersten Quadranten $Q_I = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\ \&\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und der Einheitskreisscheibe $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Betrachten wir zunächst $z \in Q_I$, dann gilt in Polardarstellung $z = |z|\exp(i\varphi) \quad \mathrm{mit} |z| > 0, \qquad 0 < \varphi < \pi/2$

$f(z) = |z|^3\exp(i3\varphi) = a\exp(i\rho)$ mit $a \in \mathbb{R}^+\ , 0 < \rho < 3\pi/2$. Das Bild ist $Q_I \cup Q_{II} \cup Q_{III}$ vereinigt mit der negativen reelen und positiven imaginären Achse.

$g(z) = i\ |z|exp(i\varphi)^* = exp(i\pi/2)|z|exp(i\varphi)^* = |z|\exp(i(\pi/2-\varphi)) = a\exp(i\rho)$ mit $a \in \mathbb{R}^+\ , 0 < \rho < \pi/2$. Das Bild ist wieder Q_I.

Ist die Einheitskreisscheibe das Urbild, so kann man leicht sehen, dass Rotationen $K_1(0)$ wieder auf sich selbst abbilden. Das bedeutet, dass wir in beiden Abbildungen die Rotation nicht weiter berücksichtigen müssen. Außerdem bildet die komplexe Konjugation Urbilder wieder auf sich selbst ab, sofern sie symmetrisch unter Spiegelung an der reelen Hauptachse sind. Da $g(z)$ den Betrag völlig unberührt lässt, ist das Bild somit wieder die Einheitskreisscheibe. Bei f(z) verändert sich der Betrag von z, allerdings gilt für $z \in K_1(0)$, dass $0 \le |z| < 1$ und damit auch $0 \le |z|^3 < 1$. Das Bild ist somit wieder die Einheitskreisscheibe.

iii) Bestimmen Sie die Haupt- und Nebenzweige der Umkehrfunktion $f^{-1}(z) = z^{1/3}$ und erläutern sie am diesem Beispiel die Konzepte von Eindeutigkeit, Mehrwertigkeit und Branch Cuts.

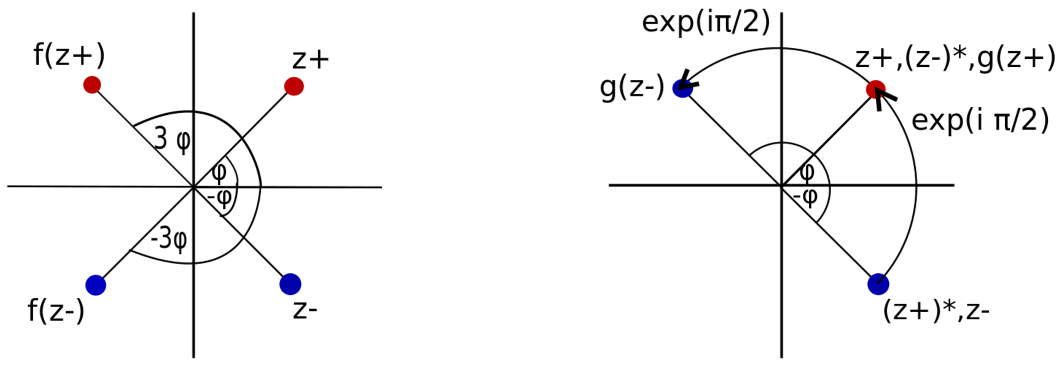

Fig. 1: Abbildungen zur Aufgabe 1.2 i)

$z^{1/3} = r^{1/3} \exp(i(\varphi + n2\pi)/3)$

n=0 entspricht dem Hauptzweig. Wenn $\varphi \in (-\pi, \pi]$, dann ist $\arg(f(z)^{-1}) \in (-\pi/3, \pi/3]$

n=1 ist der erste Nebenzweig und $\arg(f(z)^{-1}) \in (\pi/3, \pi]$

n=2 ist der zweite Nebenzweig und $\arg(f(z)^{-1}) \in (-\pi, -\pi/3]$.

Die Umkehrfunktion $f(z)^{-1} = z^{1/3}$ ist also nicht eindeutig und es gibt 3 Werte für jedes z. Um die Eindeutigkeit der Funktion zu retten, kann man zwischen den Zweigen unterscheiden. Schaut man sich die einzelnen Zweige und ihre dazugehörigen Werte an, so gibt es eine Unstetigkeit am Branchcut, also dort wo der Übergang zum nächsten Zweig wäre. Schauen wir uns dazu Werte oberhalb und unterhalb der negativen reelen Hauptachse an. Sei $z = x + iy$ mit $x <= 0$. So gilt

$$\lim_{y \searrow 0} z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{|x|} e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\lim_{y \nearrow 0} z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{|x|} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

2 Hausübungen:

2.1 Lineare Abbildungen

Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad z \mapsto f(z) \qquad f(z) = (\alpha + i\beta)z \tag{1}$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Bestimmen Sie für beliebiges $z \in \mathbb{C}$ den Real- und Imaginärteil von $f(z)$ als Funktion von $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

$$f(z) = (\alpha + i\beta)z = (\alpha + i\beta)(x + iy) = \alpha x + i\alpha y + i\beta x - \beta y = \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x)$$

Betrachten Sie nun die lineare Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto g(x, y) \qquad g(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{2}$$

mit rellen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c, d der Matrix in Def. (2) unter denen sich $w = u + iv$ mit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = g(x, y)$ als komplexe Multiplikation von $z = x + iy$ wie in Def. (1) darstellen lässt.

$$w = ax + by + icx + idy = ax + by + i(cx + dy) \tag{3}$$

Vergleich mit i) liefert, dass $b = -c,\ a = d$ Damit hat die Matrix die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

, was eine Drehstreckung beschreibt. Der Streckfaktor ist $\sqrt{a^2 + b^2}$ und der Drehwinkel $\mathrm{atan}(-\frac{b}{a})$.

iii) Bestimmen Sie für diesen Fall die Koeffizienten α, β als Funktion von a, b, c, d.

$\beta = -b = c,\ \alpha = a = d$

2.2 Wurzeln komplexer Zahlen

i) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $z^4 = -1$ und $z^3 = i$.

Betrachten wit nun zunächst $z^4 = -1$.

Stellen wir -1 in Polarkoordinaten dar und beachten, dass wir diese beliebig oft um 2π rotieren können, so gilt $-1 = \exp(i(\pi + n * 2\pi))$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Stellen wir nun auch z in Polarkoordinaten dar, so ergibt sich $z = r\exp(i\varphi), \quad z^4 = r^4 \exp(i4\varphi)$ und $r^4 = 1 \to r = 1$. Wobei bei der letzten Identität benutzt wurde, dass $r \geq 0$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt.

Es bleibt also nur noch zu folgende Gleichung zu lösen $4\varphi = \pi + n * 2\pi$.

$\varphi = \pi/4 + n * \pi/2 \qquad n \in \mathbb{Z}$

Wir erhalten 4 unterschiedliche Lösungen für n=0,1,2,3

$$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4} \qquad \rightarrow z_{0,1,2,3} = e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Betrachten wir nun $z^3 = i$. Es ergibt sich gleichermaßen

$i = \exp(i(\pi/2 + n * 2\pi))$

$z^3 = r^3 \exp(i3\pi/4) \qquad r^3 = 1 \rightarrow r = 1$

$3\varphi = \pi/2 + n * 2\pi \qquad \varphi = \pi/6 + n * 2/3\pi$

n=0,1,2

$$\rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{2} \rightarrow z_{0,1,2} = e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

ii) Bestimmen Sie die n-ten Einheitswurzeln z_k d.h. alle $k = 0, \cdots, n-1$ Lösungen $z_k \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^n = 1$ für $n \in \mathbb{N}$.

Die Rechnung kann analog zu i) durchgeführt werden.

$1 = 1\exp(i(0 + k * 2\pi))$

$z^n = r^n exp(in\varphi) \qquad r^n = 1 \rightarrow r = 1$

$n\varphi = k * 2\pi \qquad k = 0, 1, .., n-1$

$\varphi = 2\pi k/n \qquad \rightarrow z_k = \exp(i2\pi k/n)$ mit $k = 0, .., n-1$

iii) Beweisen Sie, dass für $n > 1$ die Summe der n-ten Einheitswurzeln verschwindet, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0\ .$$

Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Summenformel $\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$.

Aus ii) ist bekannt das

$$z_k = \exp(i\frac{2\pi}{n})^k \qquad k = 0, 1...n-1$$

Damit lässt sich die Summe wie folgt berechnen

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \exp(i\frac{2\pi}{n})^k = \frac{1-z_1^n}{1-z_1} = 0$$

wobei im letzten Schritt $z_1^n = 1$ verwendet wurde.