Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 9:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 10.12
Abgabe der Hausübungen am 17.12

1 Präsenzübungen:

1.1 Sattelpunktsnäherung

i) Bestimmen Sie $I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz\ \exp(isz^2)$ mit Hilfe der Sattelpunktsnäherung

ii) Vergleichen Sie das Ergebnis aus (i) mit dem aus der Vorlesung bekannten exakten Result $I(s) = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2s}}$ und kommentieren Sie den Vergleich

1.2 Vektorräume und Skalarprodukt

Zeigen Sie dass für Funktionen $\phi_k(x) = \exp(ikx)$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$

i) Die Menge der Funktionen $\left\{ f(x) : f(x) = \sum_k \lambda_k \exp(ikx) \text{ mit } \lambda_k \in \mathbb{C} \right\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen komplexen Vektorraum, also einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ bildet

ii) Die Verknüpfung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^{2\pi} dx\ f^*(x)g(x)$$

ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum definiert.[1]

[1] Streng genommen müssen wir noch zusätzlich fordern dass $\sum_k |\lambda_k|$ absolut konvergiert damit die Multiplikation mathematisch rigoros durch das Cauchy Produkt von Reihen definiert werden kann. Das Cauchy Produkt von zwei absolut konvergenten Reihen ist wieder eine absolut konvergente Reihe.

2 Hausübungen:

2.1 Vektorräume und Skalarprodukt

i) Beweisen Sie dass die Menge der Polynome vom Grad zwei, also $\Big\{p(x) : p(x) = a + bx + cx^2 \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}\Big\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation einen reellen Vektorraum, also einen Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$ bildet

ii) Beweisen Sie, dass die Verknüpfung

$$\langle f|g\rangle = \int_0^\infty dx\; e^{-x}\; f(x)g(x)$$

ein Skalarprodukt auf diesem Vektorraum definiert

iii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt Verfahrens eine Orthonormalbasis des Vektorraums bezueglich des in (ii) definierten Skalarprodukts

2.2 Kramers-Kronig Relation

Betrachten Sie die komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ deren Realteil die Integralgleichung

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x,0)}{x - x_0} = \frac{1}{1 + x_0^2} \tag{1}$$

erfüllt, und von der bekannt sei dass Sie keinerlei Singularitäten in der oberen komplexen Halbebene besitzt sowie für $|z| \to \infty$ verschwindet.

i) Bestimmen Sie den Imaginärteil $v(x, 0)$ der Funktion

ii) Bestimmen Sie den Realteil $u(x, 0)$ der Funktion

iii) Verifizieren Sie Gl. (1) durch explizite Berechnung des Integrals

iv) Bestimmen Sie die Funktion $f(z)$ durch analytische Fortsetzung (i.e. durch das ersetzen von $x \in \mathbb{R}$ durch $z \in \mathbb{C}$) und verifizieren Sie die Annahmen hinsichtlich der Position von Singularitäten und des asymptotischen Verhalten der Funktion