Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 8:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 03.12
Abgabe der Hausübungen am 10.12

1 Präsenzübungen:

1.1 Heavyside Stufenfunktion

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Funktion

i) $\theta(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dw \frac{e^{iwt}}{w - i\epsilon}$

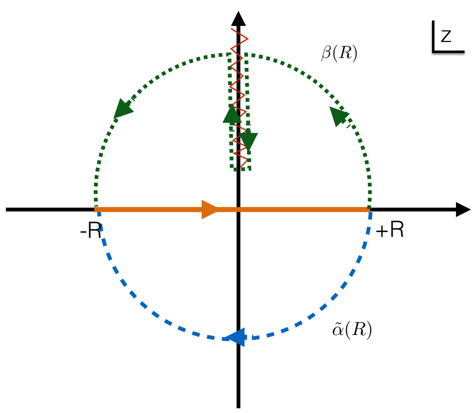
1.2 Berechnung von Integralen mit Schnitten in der komplexen Ebene

Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\log(x-i)}{(x+i)^2}$ indem Sie den branch cut des Logarithmus wie in Abb.1 eingezeichnet entlang der positiven imaginären Achse legen und

i) die Integrationskontour durch $\tilde{\alpha}(R)$ zu einer geschlossenen Kontour vervollständingen

ii) die Integrationskontour durch $\beta(R)$ zu einer geschlossenen Kontour vervollständingen

Fig. 1:



2 Hausübungen:

2.1 Berechnung von Reihen durch Kontourintegrale

Betrachten Sie die aus der Vorlesung bekannte Funktionen $\phi(iz) = \frac{1}{e^{iz}-1}$, sowie eine beliebige Funktion $f(z)$ die auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorph ist.

i) Bestimmen Sie die Singularitäten z_n der Funktion $\phi(iz)f(z)$

ii) Bestimmen Sie die Residuen der Funktion $\mathrm{res}_{z_n}(\phi(iz)f(z))$ für alle singulären Punkte $z_n \neq 0$

iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und ii) um die Summe der reziproken Quadratzahlen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ als komplexes Kontourintegral

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4\pi i} \oint_{\gamma_L + \gamma_R} \phi(iz) f(z)$$

entlang der in Abb.2 dargestellten Kontouren γ_L und γ_R darzustellen, und bestimmen Sie die Funktion $f(z)$.

iv) Verwenden Sie die Darstellung aus iii) um $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ durch die Abb. 2 dargestellte Vervollständigung der Integrationskontour explizit zu bestimmen.

2.2 Sattelpunktsnäherung

Berechnen Sie basierend auf der Integraldarstellung

$$K_\nu(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dw}{w} w^\nu \exp\left(-\frac{s}{2}(w + 1/w)\right)$$

die asymptotische Entwicklung der modifizierten Bessel Funktion $K_\nu(z)$ für $s \to \infty$ bei festem ν.

Fig. 2: