Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 7:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 26.11
Abgabe der Hausübungen am 03.12

1 Präsenzübungen:

1.1 Bestimmung von Residuen

Bestimmen Sie die Pole und Residuen der folgenden Funktionen

i) $f(z) = \frac{h(z)}{e^z - 2}$ mit $h(z)$ holomorph

ii) $f(z) = \frac{z^4}{(z^2-2z+1)(z+1)}$

iii) $f(z) = \frac{\sin(mz)}{z^n} \qquad n \in \mathbb{N}$

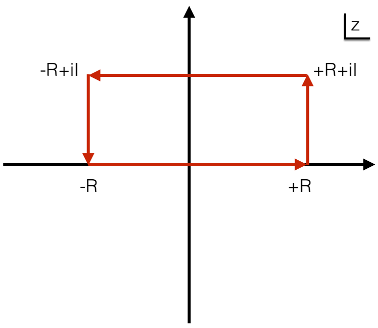
1.2 Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

Berechnen Sie das reelle Integral

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{e^{ax}}{1+e^x} \; , \qquad 0 < a < 1 \; .$

indem Sie es durch eine geeignete Wahl der Konstante I mit dem in Abb. 1 dargestellten komplexen Kontourintegral in Verbindung bringen.

Fig. 1:



2 Hausübungen:

2.1 Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

Bestimmen Sie die reellen Integral

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{1+x^4}$

ii) $\int_{0}^{\infty} dx\ \frac{1}{1+x^5}$

2.2 Argumentprinzip

Betrachten Sie die Funktion $f(z)$ die bis auf endlich viele isolierte Singularitäten in $\{b_i, \cdots, b_j\}$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet U holomoroph ist.

i) Bestimmen Sie das Residuum von $\mathrm{res}_{z_0}(f'(z)/f(z))$ wenn $f(z)$ in $z = z_0$ eine Nullstelle k-ter Ordnung hat

   [Hinweis: Verwenden Sie die Potenzreihendarstellung von $f(z)$]

ii) Bestimmen Sie das Residuum von $\mathrm{res}_{z_p}(f'(z)/f(z))$ wenn $f(z)$ in $z = z_p$ einen Pol m-ter Ordnung hat

   [Hinweis: Verwenden Sie die Laurentreihendarstellung von $f(z)$]

iii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und ii) um folgende Aussage zu beweisen, die als Argumentsprinzip bezeichnet wird

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = Z - P$$

   wobei Z die Anzahl der Nullstellen (inklusive ihrere Multiplizitäten) und P die Anzahl der Pole (inklusive ihrere Multiplizitäten) bezeichnet, die von der Kurve γ eingeschlossen werden.