Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 6:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 19.11
Abgabe der Hausübungen am 26.11

1 Präsenzübungen:

1.1 Umlaufzahlen

Bestimmen Sie die Umlaufzahlen der Kurven γ_1 und γ_2 bezueglich der Punkte z_1, z_2 und z_3 in Abb. 1.

1.2 Entwicklung in Laurentreihen

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$

i) Entwickeln Sie die Funktion in eine Laurentreihe um den Punkt $z_0 = 1$ und geben Sie deren Konvergenzbereich an.

ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes und der Darstellung als Laurentreihe das komplexe Kontourintegral entlang der in Abb. 2 dargestellten Kontour.

Fig. 1:

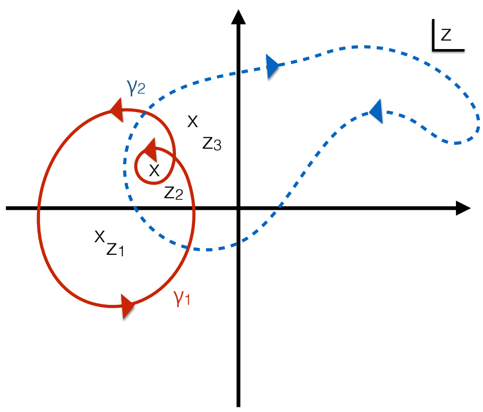
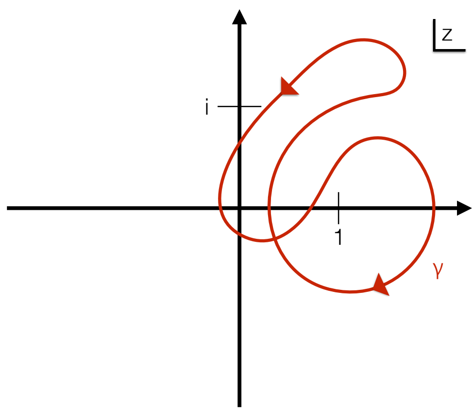


Fig. 2:



2 Hausübungen:

2.1 Kontourintegrale

Berechnen Sie für $R > 0$ mit $R \neq 1$ die komplexen Kontourintegrale

i) $\oint_{\partial K_R(0)} \frac{1}{z^2-1} dz$

ii) $\oint_{\partial K_R(0)} \frac{1}{z^2+z} dz$

2.2 Partialbruchzerlegung

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$, von der Sie ohne Beweis annehmen koennen dass Sie sich in einer Partialbruchzerlegung als $f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{(z-1)^2}$ darstellen lässt

i) Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c in der Partialbruchzerlegung von $f(z)$

ii) Bestimmen Sie mit Hilfe des Residuensatzes und der Partialbruchzerlegung aus (i), die komplexen Kontourintegral entlang der in Abb. 3 dargestellten Kontouren.

2.3 Cauchys Integralsatz auf Kreisringen

Sei $f : U \mapsto \mathbb{C}$ holomorph auf einem Kreisring $U = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ und ρ, P so gewählt dass $0 \leq r \leq \rho \leq P \leq R \leq \infty$ so gilt

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_P(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\rho(0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \qquad \forall\ z_0 : \rho < |z_0| < P \tag{1}$$

i) Betrachten Sie zunächst den Integrand $\frac{f(z)}{z-z_0}$. Bestimmen Sie die mögliche Position von Singularitäten, sowie die Umlaufzahlen bei den Kontourintegrationen über $\partial K_P(0)$ und $\partial K_\rho(0)$

ii) Beweisen Sie die Aussage in (1) mit Hilfe des Residuensatzes.

Fig. 3: