Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 4:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 05.11
Abgabe der Hausübungen am 12.11

1 Präsenzübungen:

1.1 Cauchys Integralsatz und Kontourdeformationen

Betrachten Sie die komplexen Kontourintegrale $I_r = \int_{\partial K_r(0)} f(z)$ und $I_R = \int_{\partial K_R(0)} f(z)$ der komplexen Funktion $f(z)$. Welche Aussagen können Sie über die Integrale I_r und I_R treffen wenn

i) r,R beliebig und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}$ ist

ii) $R > r > 1$ und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash K_1(0)$ ist

iii) r,R beliebig und $f(z)$ holomorph auf $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < -1\}$ ist

1.2 Berchnung von Integralen durch Kontourdeformation

Betrachten Sie die die Funktion $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ mit $z \mapsto f(z) = (z+1)^{1/2}$ wobei der Hauptzweig der komplexen Wurzelfunktion zu betrachten ist

i) Bestimmen Sie das komplexe Kontourintegral

$$\oint_{\partial K_R(0)} f(z)\, dz \qquad R > 1$$

durch geeignete Deformation der Integrationskontour.

1.3 Komplexe Kontourintegrale

Betrachten Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$

i) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion und geben Sie an auf welchem Bereich f holomorph ist.

ii) Berechnen Sie die komplexen Kontourintegrale $\oint_{\partial K_{17}(3)} f(z)\, dz$ und $\oint_{\partial K_3(3)} f(z)\, dz$ wobei $\partial K_{17}(3)$ und $\partial K_3(3)$ die Kreise mit Radius $R = 17$ und $R = 3$ um den Punkt $z = 3$ bezeichnen.

2 Hausübungen:

2.1 Cauchy's Integralformel

Bestimmen Sie die komplexen Kontourintegrale

i) $\oint_{\partial K_1(0)} \frac{\sin(z)}{z-\pi/2}\ dz$

ii) $\oint_{\partial K_1(\pi)} \frac{\cos(z)}{z-\pi}\ dz$

iii) $\oint_{\partial K_{17}(3)} \frac{\exp(z)}{(z-\pi)^n}\ dz \qquad n \in \mathbb{N}$

2.2 Berechnung reeller Integrale mittels komplexer Kontourintegrale

i) Bestimmen Sie durch Verwendung von Cauchy's Integralsatz und geeignete Wahl einer komplexen Integrationskontour das reelle Integral

$$\int_0^\infty dx\ \sin\Big(\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big) \exp\Big(-\frac{x^2}{\sqrt{2}}\Big)$$