Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 12:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 14.01
Abgabe der Hausübungen am 21.01

1 Präsenzübungen:

1.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fouriertransformation durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation

i) $f(x)$ ist reell genau dann wenn $\tilde{f}(-k) = \left(\tilde{f}(k)\right)^*$

ii) $f(x)$ ist rein imaginär genau dann wenn $\tilde{f}(-k) = -\left(\tilde{f}(k)\right)^*$

1.2 Fouriertransformationen und komplexe Kontourintegration

Bestimmen Sie

i) Die Fouriertransformation der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$,

ii) Die Inverse Fouriertransformation der Funktion $\tilde{g}(k) = \frac{i}{E-k+i\Gamma}$ für $E > 0$ und $\Gamma > 0$

2 Hausübungen:

2.1 Eigenschaften der Fouriertransformation

Betrachten Sie eine Funktion $f(x)$, deren Fouriertransformation durch $\tilde{f}(k)$ gegeben ist. Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fouriertransformation bezüglich

i) Translation: $\mathcal{F}[f(x+y)](k) = e^{-iky}\tilde{f}(k)$

ii) Skalierung: $\mathcal{F}[f(\alpha x)](k) = \frac{1}{\alpha}\tilde{f}(k/\alpha)$

2.2 Fouriertransformationen und Parseval relation

i) Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Funktion $f(x) = \theta(x+1)\theta(1-x)$.

ii) Benutzen Sie das Ergebnis aus i) und die aus der Vorlesung bekannte Relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ |f(x)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\ |f(\omega)|^2$$

um das Integral $I = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ zu bestimmen.

2.3 Lösung gewöhnlicher Differentialgleichung mittels Fouriertransformation

Betrachten Sie die Differentialgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators

$$\left(\partial_t^2 + \gamma\partial_t + \omega_0^2\right)\phi(t) = f(t) \tag{1}$$

der durch eine Kraft $f(t)$ angetrieben wird.

i) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für $\tilde{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ \phi(t)e^{-i\omega t}$ indem Sie Gl. (1) Fouriertransformieren

ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegunsgleichung für $\tilde{\phi}(\omega)$

iii) Bestimmen Sie für den Spezialfall $f(t) = 2\pi\delta(t)$ eine Lösung $\phi(t)$ als Funktion der Zeit indem Sie die Inverse Fouriertransformation ausführen