Mathematische Methoden der Physik WS 19/20 – Übungszettel 10:

Universität Bielefeld
Jun.-Prof. Dr. S. Schlichting

Bearbeitung der Präsenzübungen am 17.12
Abgabe der Hausübungen am 07.01

1 Präsenzübungen:

1.1 Vektorraum, Dualraum und Braket Notation

Betrachten Sie den reellen Vektorraum $P_2([-1,1],\mathbb{R})$ von Polynomen mit Grad kleiner gleich zwei also $\Big\{p : [-1,1] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto p(x) = a + bx + cx^2 \text{ mit } a,b,c \in \mathbb{R}\Big\}$ ausgestattet mit der üblichen Addition und Multiplikation, sowie dem Skalarprodukt

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} dx f(x)g(x)$$

i) Verifizieren Sie dass $\{e_i\}$ mit $e_1(x) = 1/\sqrt{2}$, $e_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x$ und $e_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}(3x^2-1)$ eine Orthonormalbasis von $P_2([-1,1],\mathbb{R})$ bilden

ii) Geben Sie den Dualraum $P_2^*([-1,1],\mathbb{R})$ an und bestimmen Sie eine Basis $\{e_i^*\}$ des Dualraums.

iii) Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der linearen Abbildung

$$L : P_2([-1,1],\mathbb{R}) \to P_2([-1,1],\mathbb{R}) \qquad a + bx + cx^2 \mapsto b + ax$$

in der in i) gegebenen Orthonormalbasis

1.2 Dirac δ-Distribution

i) Berechnen Sie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \cos(x)\delta(ax+b)$ für $a \neq 0$

ii) Zeigen Sie dass $f_\epsilon(x) = \frac{\exp(-\frac{x^2}{2\epsilon})}{\sqrt{2\pi\epsilon}}$ im Grenzwert $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$ für eine geeignete Klasse von Testfunktionen $\Psi(x)$ eine Darstellung der δ-Distribution liefert

2 Hausübungen:

2.1 Dirac δ-Distribution

Berechnen Sie folgende Integrale

i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2}\delta\Big(x^2-1\Big)$

ii) $\int_0^{2\pi} dx\ x^2\delta\Big(\cos(x)\Big)$

2.2 Dirac δ-Distribution

Zeigen Sie für die folgenden Funktionen $f_\epsilon(x)$ dass $\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x)$ für eine geeignete Klasse von Testfunktionen $\Psi(x)$ eine Darstellung der δ-Distribution liefert

i) $f_\epsilon(x) = \frac{e^{-|x|/\epsilon}}{2\epsilon}$

ii) $f_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(x/\epsilon)}{x}$

2.3 Weihnachtsaufgabe

Bestimmen Sie für $f(z) = z$ das Integral $\oint_\gamma dz\ f(z)$ entlang der in Abb. 1 eingezeichnet Kontur γ.

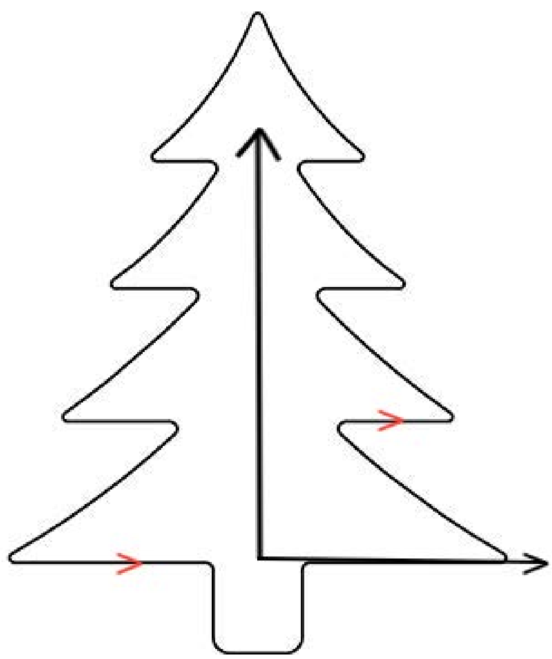

Fig. 1: Frohe Weihnachten!