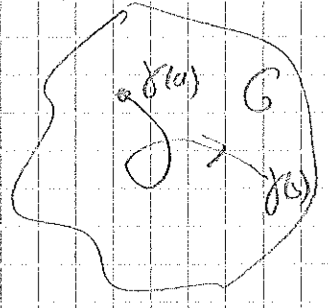
Wiederholung: Komplexe Konturintegrale

Sei eine stetig differenzierbare Kurve

$$\gamma : \underset{\subset \mathbb{R}}{[a,b]} \to \underset{\subset \mathbb{C}}{G}$$



$$t \longmapsto \gamma(t)$$

komplexe Funktion

$$f : G \to \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto f(z)$$

definiert als $\displaystyle\int_\gamma dz\, f(z) \equiv \int_a^b dt\, \gamma'(t)\, f(\gamma(t))$

wobei durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\int_\gamma dz\, f(z) = \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt} u(x(t),y(t)) - \frac{dy}{dt} v(x(t),y(t))\right)$$
$$+ i \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt} v(x(t),y(t)) + \frac{dy}{dt} u(x(t),y(t))\right)$$

die Integrale als reelle Riemann Integrale bestimmt werden können, für die die üblichen Integrationsregeln gelten
insbesondere Additionsregel, Substitutionsregel, partielle Integration

Desweiteren gelten

① Linearität, Invarianz unter Umparametrisierung

Vorzeichenumkehr bei Richtungsumkehr

Lemma: Sei $f(z)$ eine holomorphe Funktion auf $G \subseteq \mathbb{C}$, die auf einem Teilgebiet $U \subseteq G$ eine Stammfunktion F hat so dass

$$\forall z \in U \quad F'(z) = f(z)$$

Dann gilt $$\int_\gamma dz\, f(z) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$
d.h. insbesondere hängt das Komplexe Konturintegral nicht vom Weg ab

Beweis:
$$\int_\gamma dz\, f(z) = \int_a^b dt\, \gamma'(t)\, f(\gamma(t))$$
$$= \int_a^b dt\, \gamma'(t)\, F'(\gamma(t))$$
$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b dt\, \frac{d}{dt} F(\gamma(t))$$
$$\overset{\text{totale Ableitung}}{=} F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

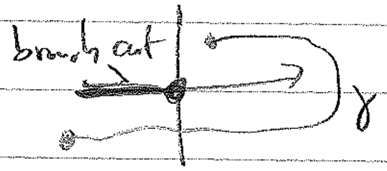
Damit lassen sich nun also einige komplexe Integrale ausführen, allerdings ist hierbei darauf zu achten dass die Anforderungen des Lemmas erfüllt sind

Beispiel: Betrachte $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Die Stammfunktion ist genau wie man vermutet

$$F(z) = \log(z)$$

allerdings nur auf $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}^-\}$ definiert



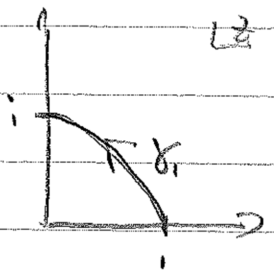
Dementsprechend können wir mit Hilfe des Lemmas [illegible] Integrale bestimmen die den branch cut nicht überqueren

Die allgemeine Bestimmung von komplexen Konturintegralen erfolgt mittels Parametrisierung der Kurve γ und expliziten auswerten

Beispiel:

$$f(z) = \bar{z}^2 \quad \text{(nicht holomorph)}$$

Betrachte das Integral über einen Viertelkreis



Kurve: $\gamma_1 : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto e^{it}$$

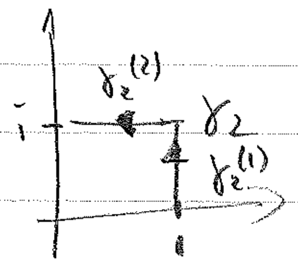
$$\gamma(0) = 1 \qquad \gamma(1) = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) = \int_0^{\pi/2} dt\, \underbrace{\gamma'(t)}_{ie^{it}}\, \underbrace{f(\gamma(t))}_{e^{-2it}} = i \int_0^{\pi/2} dt\, e^{-it} = -\left[e^{-it}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 1 + i$$

Betrachten wir nun das gleiche Integral entlang einer anderen Kontur mit gleichem Anfangs und Endpunkt

Stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung



$$\gamma_2^{(1)}: [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto 1+it$$

$$\gamma_2^{(2)}: [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto (1-t)+i$$

$$\int_{\gamma_2} dz\, f(z) = \int_{\gamma_2^{(1)}} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2^{(1)}} dz\, f(z)$$

$$= \int_0^1 dt\; i\left((1+it)^*\right)^2 + \int_0^1 dt(-1)\left(\left((1-t)+i\right)^*\right)^2$$

$$= i\int_0^1 dt\,(1-2it-t^2) - \int_0^1 dt\left(1-2t+t^2-2i(1-t)-1\right)$$

$$= i\left(1-i-\tfrac{1}{3}\right) - \left(-1+\tfrac{1}{3}-2i+i\right)$$

$$= \tfrac{2}{3}i+1 \qquad + \tfrac{2}{3}+i = \tfrac{5}{3}+\tfrac{5}{3}i$$

d.h. in diesem Fall ist das Konturintegral explizit von der Wahl der Kontur abhängig

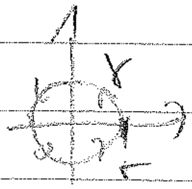
Wir betrachten als nächstes Beispiel die Funktion

$$f(z) = z^n \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

welches von fundamentaler Bedeutung für die Funktionentheorie ist

Die Funktion ist holomorph auf $\mathbb{C}$ für $n \geq 0$ und holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ für $n < 0$

Diesmal verwenden wir den Kreis mit radius r der in mathematisch positiver Richtung also entgegen dem Uhrzeigersinn durchschritten wird



<u>Kurve:</u> $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$

$t \mapsto re^{it}$

$$\int_{\partial B_r(0)} dz\, f(z) = \int_\gamma dz\, f(z) = \int_0^{2\pi} dt\, ire^{it}\left(re^{it}\right)^n$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} dt\, e^{i(n+1)t}$$

Damit erhalten wir für $n \neq -1$ durch die Stammfunktion

$\boxed{n \neq -1}$ $$\int_\gamma dz\, f(z) = ir^{n+1} \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = \frac{ir^{n+1}}{n+1}\left[e^{2\pi i(n+1)} - 1\right] = 0$$

Der Fall $n=-1$ muss gesondert betrachtet werden, hier gilt

$$\boxed{n=-1} \quad \int_\gamma dz\, f(z) = \int_0^{2\pi} dt\; ir e^{it} \left(re^{it}\right)^{-1}$$

$$= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

d.h. wir erhalten

$$\int_{\partial B_r(0)} dz\, z^n = \begin{cases} 2\pi i & n=-1 \\ 0 & n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\} \end{cases}$$

Insbesondere ist der Wert des Integrals unabhängig vom radius r des Kreises

Durch explizites nachrechnen lässt sich ausserdem überprüfen dass andere Integrationspfade das gleiche Ergebnis geliefert hätten

Das lässt sich für $n\neq-1$ auch aus dem Lemma herleiten, da für $n\neq-1$ die Stammfunktionen

$$F(z) = \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

allesamt stetig komplex differenzierbar auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ sind.

Dann gilt für $n\neq-1$

$$\int_{\partial B_r(0)} dz\, f(z) = F(r) - F(r) = 0$$

Damit wir verstehen können was im Fall $n=-1$ unterschiedlich ist schauen wir uns diesen Fall erneut genauer an

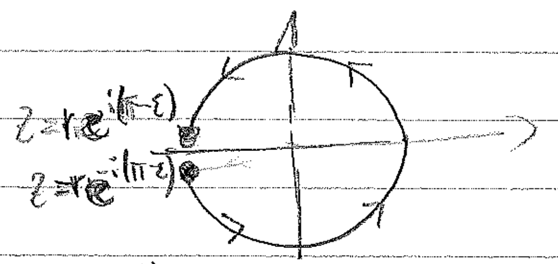
Wie bereits besprochen ist

$$F(z) = \log(z) \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$$

eine Stammfunktion von

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

Die Integrationskontur lässt sich damit zwar nicht als Einheitskreis deformieren, allerdings können wir diesen durch geschickte Wahl der Kontur versuchen anzunähern



Betrachten wir dazu zunächst den offenen Kreis

offener Kreis

$$\gamma: [-(\pi-\varepsilon), \pi-\varepsilon] \to \mathbb{C}$$

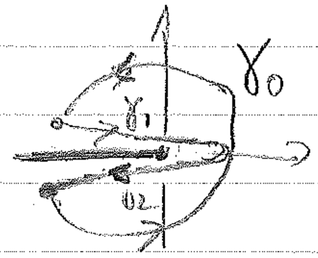
$$\int_\gamma dz\, f(z) = \Big[\log(z)\Big]_{re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{re^{i(\pi-\varepsilon)}}$$

$$= \log(r) + i(\pi-\varepsilon) - \big(\log(r) - i(\pi-\varepsilon)\big)$$

$$= 2\pi i - 2i\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 2\pi i$$

Dabei ist es egal welchen Zweig des Logarithmus wir wählen

Das wiederum veranschaulicht einen Trick bzw.
eine wichtige Methode zur Berechnung von Integralen



Da die Stammfunktion auf $\mathbb{C}\setminus\{i\mathbb{R}\}$ holomorph ist muss das geschlossene Integral natürlich verschwinden

geschlossene Kontour

$$0 = \oint_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_0} dz\, f(z) + \int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2} dz\, f(z)$$

$$\overset{\lim_{\varepsilon\to 0}}{=} 2\pi i + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-r}^{+r} dt\, \frac{1}{t+i\varepsilon} + \int_{+r}^{-r} dt\, \frac{1}{t-i\varepsilon}\right)$$

Dementsprechend muss gelten

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-r}^{r} dt \left(\frac{1}{t+i\varepsilon} - \frac{1}{t-i\varepsilon}\right) = -2\pi i$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-r}^{r} dt\, \frac{-2i\varepsilon}{t^2+\varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2i \arctan\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right]_{-r}^{+r}$$

$$= -4i\, \underbrace{\lim_{\varepsilon\to 0} \arctan\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} = -2\pi i$$

Das lässt uns in manchen Fällen reelle Integrale durch komplexe Konturintegrale berechnen

Dies ist eine wichtige Rechentechnik die wir im weiteren Verlauf der Vorlesung noch verwenden werden

Durch die Existenz einer Stammfunktion folgen einige wichtige Aussagen über Kontur Integrale:

<u>Korollar</u> Wenn f in G eine Stammfunktion F hat, so gilt für $\gamma(t) \in G$

$$\int_\gamma dz\, f(z)$$ <u>unabhängig vom Weg</u>

Insbesondere gilt für <u>geschlossene Kurven</u>

$$\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$$

Die wesentliche Frage ist also <u>unter welchen Bedingungen</u> $f(z)$ <u>auf welchen Gebieten</u> eine Stammfunktion hat.