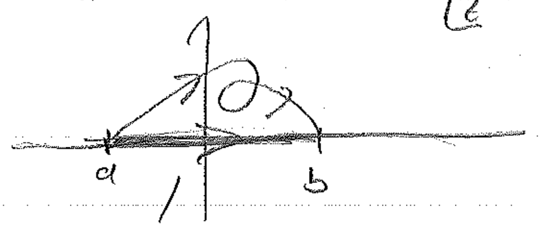
I.4 Komplexe Integration

Neben der Differentiation sind wir natürlich auch interessiert in der Integration komplexer Funktionen.

Hierbei trifft ähnlich zur Differentiation die Frage auf „in welcher Richtung" wir eine komplexe Funktion integrieren wollen

Bsp:



reelles Integral $\int_a^b dx$

Dabei sind in der komplexen Ebene grundsätzlich verschiedene Integrationspfade denkbar

D.h. wir werden uns fast ausschließlich mit komplexen Kurvenintegralen beschäftigen und nicht mit Flächenintegralen in der komplexen Ebene.

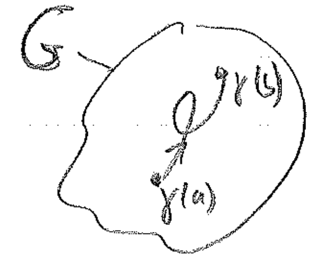
Eine wichtige Erkenntnis wird sein dass für holomorphe Funktionen der Wert des Integrals ausschließlich vom Anfangs- und Endpunkt abhängt und nicht von der Wahl des Weges

Dies ist analog zur Existenz einer Potentialfunktion für Vektorfelder im $\mathbb{R}^3$

Damit wir komplexe Kurvenintegrale / Konturintegrale definieren können betrachten wir
<u>stetig differenzierbare</u> Kurven

$$\gamma : [a,b] \to G \subseteq \mathbb{C} \qquad t \mapsto \gamma(t)$$

und eine komplexe Funktion



$$f : G \to \mathbb{C}$$
$$z \mapsto f(z)$$

und definieren das <u>komplexe Kurvenintegral</u>

$$\int_\gamma dz\, f(z) \equiv \int_a^b dt\, \gamma'(t)\, f(\gamma(t))$$

wobei durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil

$$\gamma(t) = x(t) + i\,y(t)$$

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

das Integral gegeben ist durch

$$\int_\gamma dz\, f(z) = \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}\, u(x(t),y(t)) - \frac{dy}{dt}\, v(x(t),y(t)) \right)$$
$$+\, i \int_a^b dt \left(\frac{dx}{dt}\, v(x(t),y(t)) + \frac{dy}{dt}\, u(x(t),y(t)) \right)$$

wobei die Integrale auf der rechten Seite als reelle (Riemann-) Integrale zu verstehen sind

Damit folgen einige grundlegende Eigenschaften direkt aus denen der reellen Integrale

$\mathbb{C}$-Linearität:
$\lambda \in \mathbb{C}$

$$\int_\gamma (\lambda f(z) + g(z))\,dz = \lambda \int_\gamma f(z)\,dz + \int_\gamma g(z)\,dz$$

Invarianz unter Umparametrisierung:

D.h. wenn wir $\gamma(t)$ durch $\gamma(s(t))$ ersetzen erhalten wir

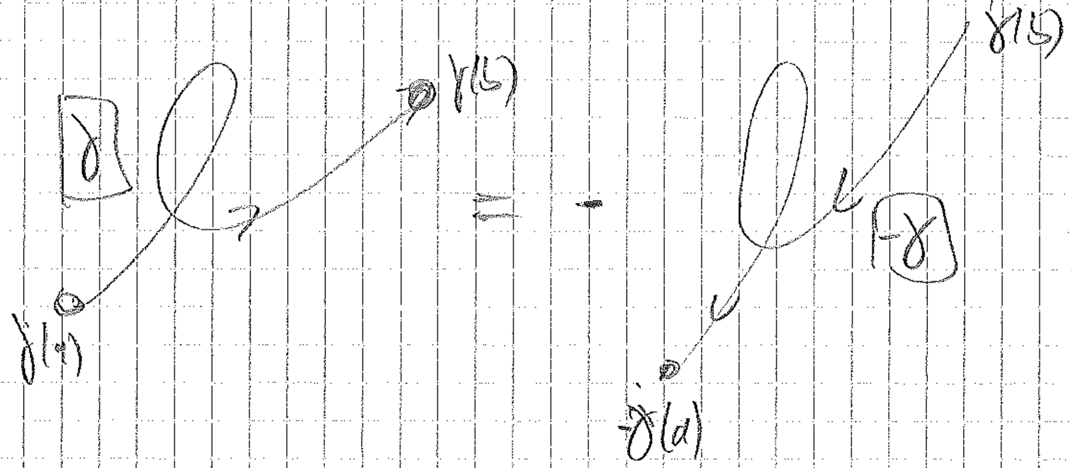
$$\int_\gamma dz\, f(z) = \int_a^b dt \left(\frac{d}{dt}\gamma(s(t))\right) f(\gamma(s(t)))$$

$$\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_a^b dt\, \frac{ds}{dt}\frac{d\gamma}{ds} f(\gamma(s(t)))$$

$$= \int_{s(a)}^{s(b)} ds\, \frac{d\gamma}{ds} f(\gamma(s))$$

d.h. das Ergebnis hängt nicht davon ab auf welche Weise wir die Kurve γ parametrisieren solange diese stetig differenzierbar geschieht

Vorzeichenänderung bei Richtungsumkehr



Durch Umparametrisierung wähle obdA $[a,b]$ als $[0,1]$

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad -\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \gamma(t) \qquad t \to \gamma(1-t)$$

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = \int_0^1 dt \left(\frac{d}{dt}\gamma(1-t)\right) f(\gamma(1-t))$$

$$= -\int_0^1 dt\, \gamma'(1-t)\, f(\gamma(1-t))$$

$s = 1-t \quad ds = -dt$

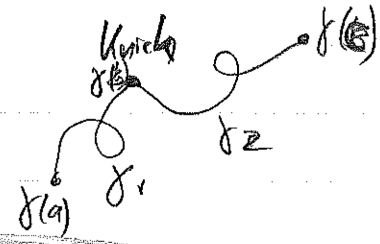
$s(t=0) = 1$

$s(t=1) = 0$

$$= +\int_1^0 ds\, \gamma'(s)\, f(\gamma(s))$$

$$= -\int_0^1 ds\, \gamma'(s)\, f(\gamma(s)) = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Durch Aneinanderreihung von Wegen lässt sich die Definition auf <u>stückweise stetig differenzierbare</u> Kurven erweitern



Dann ist $$\int_{\gamma_1} dz\, f(z) + \int_{\gamma_2} dz\, f(z)$$

$$= \int_a^b dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t)) + \int_b^c \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t))$$

$$= \int_a^c dt\, \dot\gamma(t)\, f(\gamma(t)) = \int_\gamma dz\, f(z)$$

Die Bestimmung des Kurvenintegrals ist aus der reellen Analysis geläufig und wird anhand weiterer Beispiele illustriert

Vorher betrachten wir allerdings noch einen wichtigen Spezialfall in dem das Integral durch eine Stammfunktion bestimmt werden kann