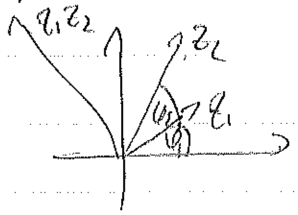
Wiederholung:

- Geometrie der komplexen Multiplikation

  → Drehstreckung

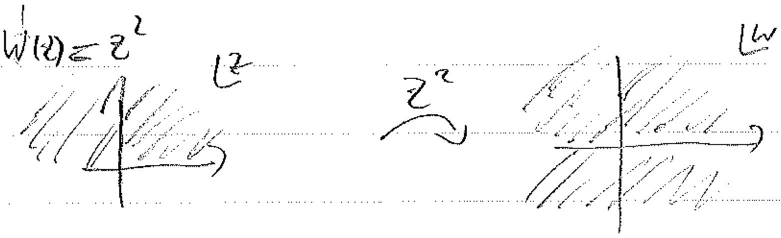
  $$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$




- Elementare Funktionen von $z \in \mathbb{C}$

  → insbesondere Monome $z \mapsto z^n$

Bsp $w(z) = z^2$




- Wurzeln von komplexen Zahlen

  → definiert als Umkehrabbildung von Monomen

$w(z) = z^{1/n}$ gibt genau $n$ Lösungen der Gleichung

$$z = w^n$$

Bestimmung durch Polarkoordinaten

$$z = |z|\, e^{i\varphi} \qquad w = |w|\, e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow w(z) = \sqrt[n]{|z|}\; e^{i\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)}$$

wobei wir die verschiedenen Lösungen wie folgt bezeichnen

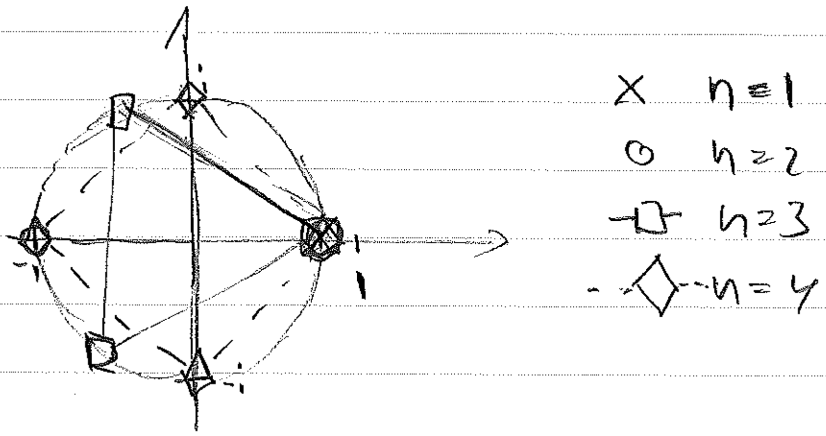
$k=0$ Hauptzweig $\quad k = 1, \dots, n-1$ Nebenzweige

Da die Abbildung des Betrags eindeutig ist $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ genügt zur Veranschaulichung ein Beispiel

<u>Bsp:</u> Einheitswurzeln, d.h. Lösungen von

$$w^n = 1 \quad (\text{d.h. Spezialfall } |z| = 1 \Rightarrow |w| = 1)$$

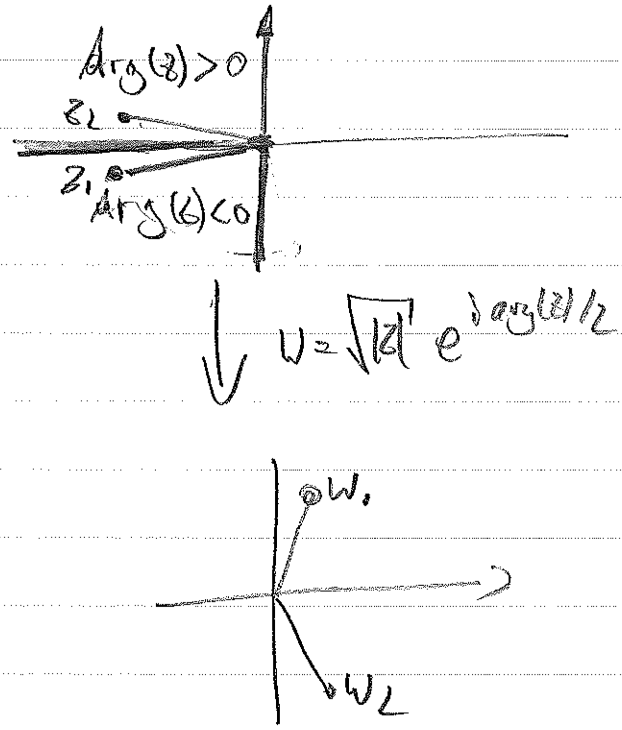
$$\Rightarrow \quad w = \underbrace{|w|}_{=1} e^{i\theta} = e^{\frac{2\pi i}{n} k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1$$




D.h. die Lösungen machen gleichseitige Polygone auf dem Einheitskreis

Wir versuchen nun die nicht Eindeutigkeit der komplexen Wurzelabbildung genauer zu verstehen

Hierzu stellen wir zunächst fest dass sich bei Beschränkung auf einen Zweig (z.B. Hauptzweig) eine eindeutige Funktion definieren lässt




Wenn wir z.B. $n=2$ betrachten lösen wir mit
$$w=\sqrt{|z|}\,e^{i\arg(z)/2}$$
eine eindeutige Lösung von $w^2=z$ wobei $-\pi<\arg(z)\le\pi$

Da $\arg(z)$ ~~bei~~ auf der negativen reellen Achse einen Sprung hat springt die Funktion

Dieses Verhalten wird als <u>branch cut</u> bezeichnet)

Wo der branch cut gelegt wird ist Definition; z.B. hätten wir durch eine andere Beschränkung von $\arg(z)$ den Branch cut auf die imaginären Achse legen können

Die Eindeutigkeit durch Beschränkung auf einen Zweig führt dazu, dass die Funktion einen Sprung bzw. genauer gesagt eine Unstetigkeit hat

<u>Def</u>: Eine Funktion $f(z)$ ist <u>stetig</u> in einer offenen Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ wenn

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

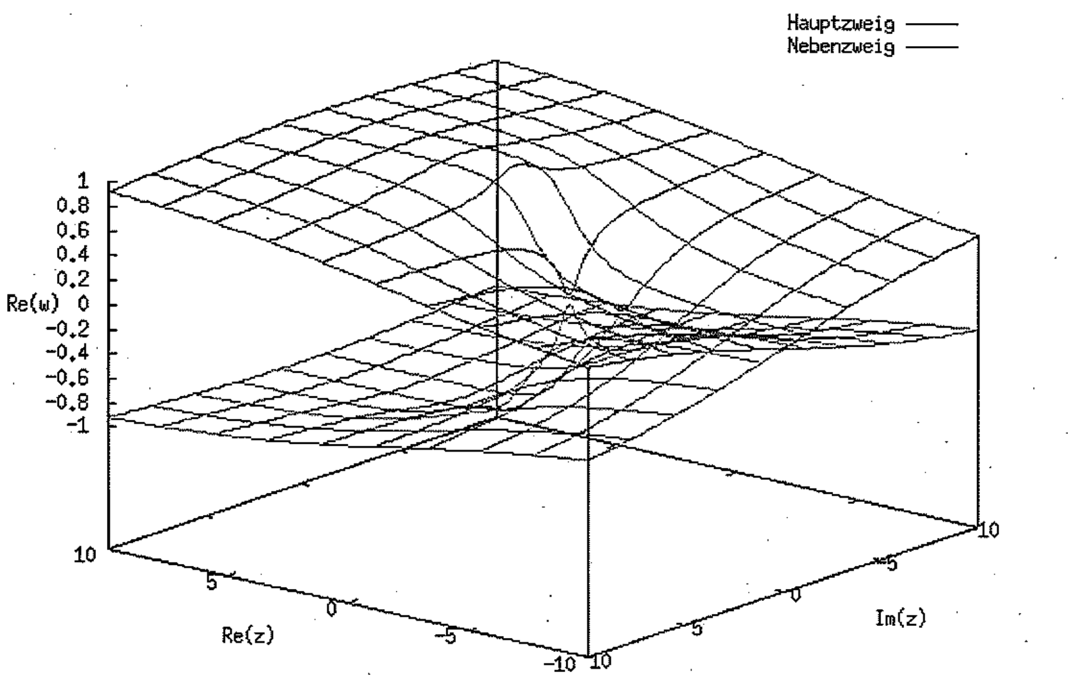
d.h. der Grenzwert existiert und entspricht dem Wert der Funktion an dieser Stelle

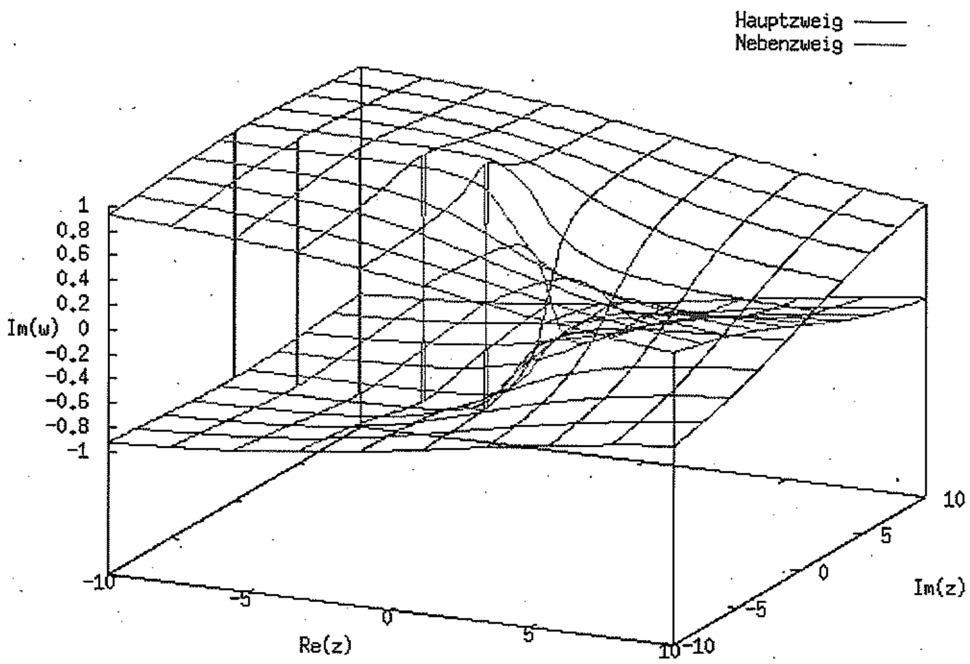
<u>NB</u>: Es gelten die üblichen Relationen, dass Summe, Produkt und Quotienten $\frac{f(z)}{g(z)}$ $(g(z) \neq 0)$ stetig sind

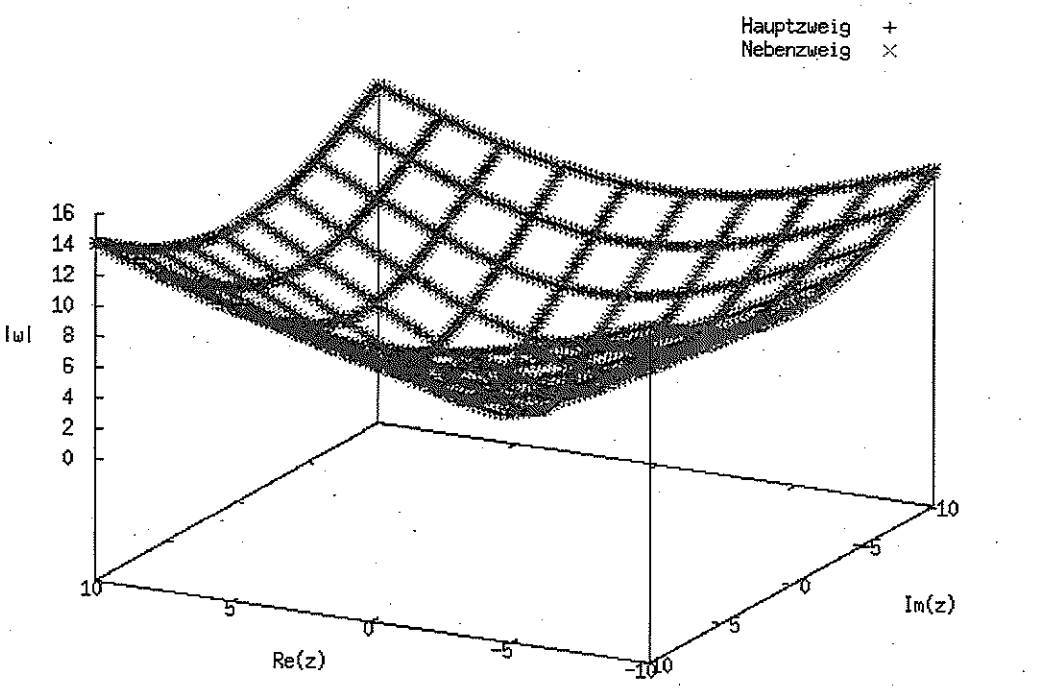
Dementsprechend ist die oben beschriebene Abbildung nicht stetig, da der Grenzwert auf der negativen reellen Achse nicht existiert

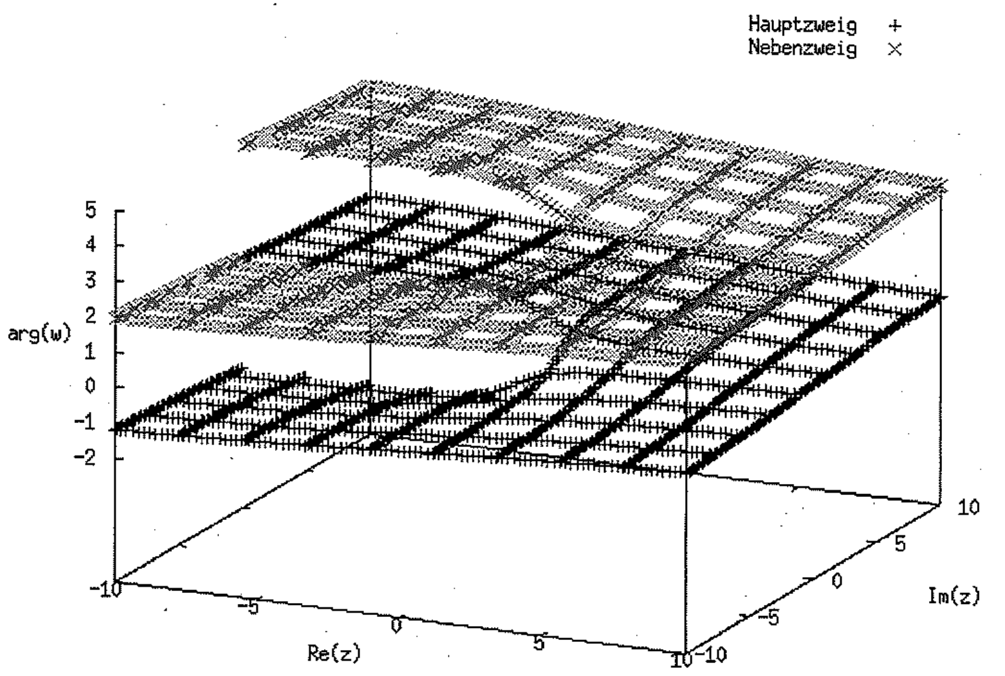
Die verschiedenen Riemannschen Flächen lassen sich durch Einbettung in $\mathbb{R}^3$ visualisieren. Hierzu trägt man z.B. $\mathrm{Re}(w)$ und $\mathrm{Im}(w)$ als Funktion von $\mathrm{Re}(z)$ und $\mathrm{Im}(z)$ auf

Bei Übergang des branch cuts wird die Funktion auf die nächste Riemannsche Fläche fortgesetzt. Nach n-maligem Übergang ist man zurück auf dem Hauptzweig


Hauptzweig
Nebenzweig
Re(w)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Re(z)
10
5
0
-5
-10
Im(z)
10
5
0
-5
10

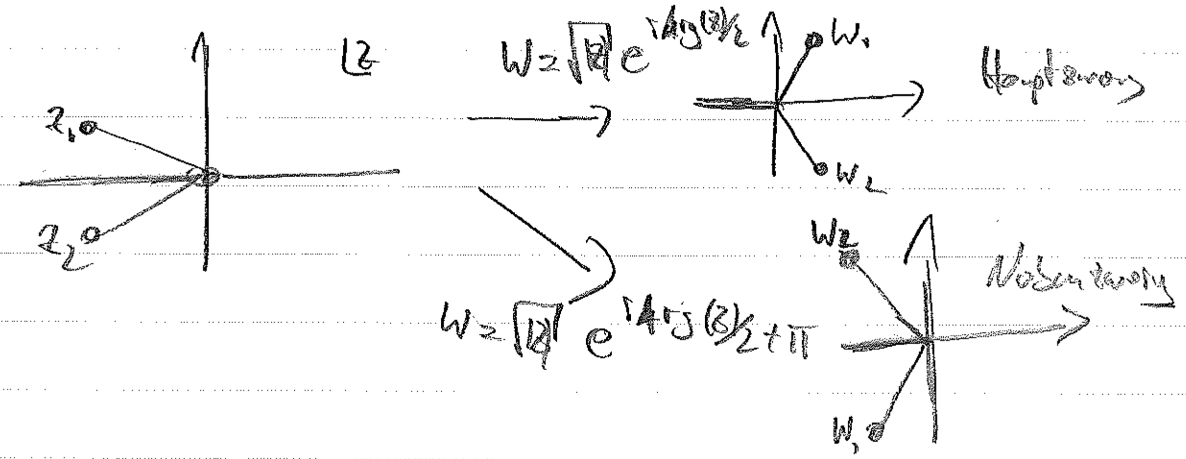

Hauptzweig
Nebenzweig
Im(w)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
Re(z)
-10
-5
0
5
10
Im(z)
-10
-5
0
5
10


Hauptzweig +
Nebenzweig ×
|w|
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Re(z)
Im(z)
10
5
0
-5
-10

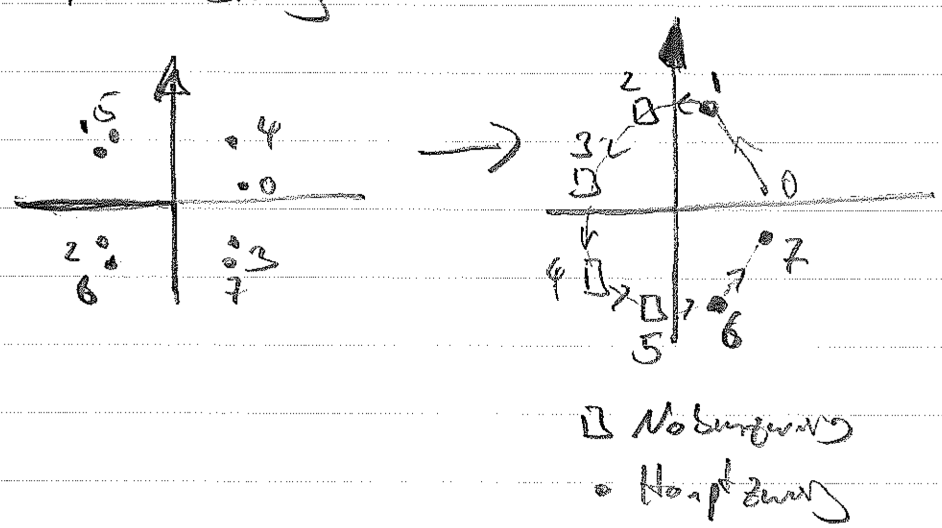

Hauptzweig +
Nebenzweig ×
arg(w)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
Re(z)
Im(z)
-10
-5
0
5
10

Die Stetigkeit lässt sich allerdings retten, wenn ~~stattdessen~~ auf die Eindeutigkeit verzichtet wird

Dazu betrachten wir wieder das Beispiel $n=2$ aber nun auch den Nebenzweig




Durch Fortsetzung der Wurzel auf den Nebenzweig bei Überqueren des branch cuts bleibt die Funktion stetig




Die $n$-verschiedenen Lösungen $w = z^{1/n}$ existieren auf $n$ verschiedenen Riemannschen Flächen die untereinander an der Position des Branch cuts $(\arg(z) = \pi)$ verbunden sind

Ein weiteres Beispiel für eine mehrwertige Funktion ist der komplexe Logarithmus, d.h. die Umkehrfunktion der komplexen Exponentialfunktion $\exp(z)$ $z \in \mathbb{C}$

In Polarkoordinaten

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| e^{i(\varphi + 2\pi k)} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

dabei ist also das Argument $\varphi = \arg(z)$ nicht eindeutig

$$\arg(z) = \underbrace{\mathrm{Arg}(z)}_{\text{beschränkt auf } [-\pi,\pi]} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Dementsprechend erhalten wir für den Logarithmus

$$\underline{\log(z)} = \log\left(|z| e^{i\varphi}\right) = \underbrace{\log(|z|)}_{\text{reeller Logarithmus}} + i \arg(z)$$

Neben dem Hauptzweig

$$\boxed{\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)}$$

existieren unendlich viele Nebenzweige

$$\log(z) = \log|z| + i\left(\mathrm{Arg}(z) + 2\pi k\right) \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Die Riemannschen Flächen lassen sich als unendliche Spirale darstellen

## III.3 Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$ & Holomorphizität

Betrachten nun Funktionen von $z \in \mathbb{C}$ und einige wichtige Eigenschaften haben

Basierend auf diesen Eigenschaften ergeben sich wichtige Rechenmethoden der theor. Physik

<u>Differenzierbarkeit:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad x \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\vec{f}(\vec{x})$ lässt sich in Umgebung um einen Punkt $\vec{x}_0$ linear nähern $f_i(\vec{x}) \approx f_i(\vec{x}_0) + (\vec{x}-\vec{x}_0) \frac{\partial f_i}{\partial \vec{x}_0}$

Bestimmung der partiellen Ableitung durch Grenzwertbildung aus der entsprechenden Richtung für die entsprechende Komponente

Definition für komplexe Funktionen $z \in \mathbb{C}$

Sei $f(z)$ eine komplexwertige Funktion, die in einer offenen Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ definiert ist

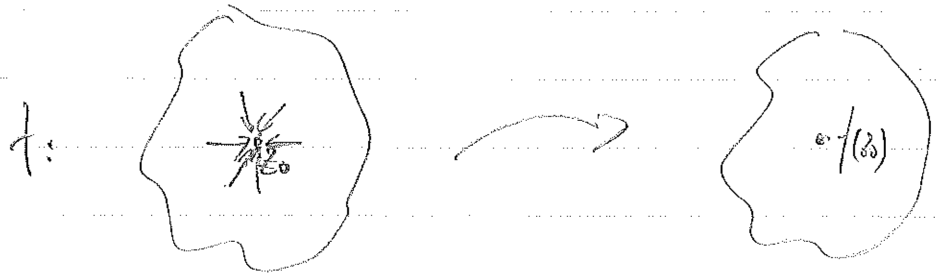
$f(z)$ ist komplex differenzierbar in $z_0$ genau dann wenn der folgende Grenzwert existiert

$$f'(z_0) = \left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_0} = \lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z} \quad \text{mit } \delta z \in \mathbb{C}$$

wobei $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ die Ableitung der Funktion

ist ... $\mathbb{C}$

Der wesentliche Unterschied zur Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^n$ ist dass der Grenzwert unabhängig von der Richtung sein muss aus der wir uns dem Punkt $z_0$ nähern




Damit erhalten wir eine stärkere Einschränkung als bei der Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^n$

Da $f'(z_0) \in \mathbb{C}$ eine der Ableitung ersetzt, bedeutet das dass sich die Linearisierung als komplexe Multiplikation (Drehstreckung) ausdrücken lassen muss

Das führt zu einer notwendigen Einschränkung an die partiellen Ableitungen des Real- und Imaginärteils der Funktion die wir uns näher betrachten werden

Vorteil: Sei $z = x+iy$ und $f(z)$ komplex differenzierbar in $z_0$ dann gilt für Real/Imaginärteil

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

$\Rightarrow$ $u, v$ sind partiell differenzierbar bzgl. $x, y$ im Punkt $(x_0, y_0)$

Beweis durch Grenzwert entlang der Reellen/imaginären Achse

Dies ist allerdings nicht die einzige Bedingung dann es gilt insbesondere, dass für

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z} = \frac{u(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - u(x_0,y_0)}{\delta x + i\delta y}$$

$$+ i\,\frac{v(x_0+\delta x, y_0+\delta y) - v(x_0,y_0)}{\delta x + i\delta y}$$

Die Grenzwerte entlang beliebiger Richtungen übereinstimmen

z.B. $\boxed{\delta y = 0}$ $$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{u(x_0+\delta x, y_0) - u(x_0,y_0)}{\delta x} + i\,\frac{v(x_0+\delta x, y_0) - v(x_0,y_0)}{\delta x}$$

$\boxed{\delta x = 0}$ $$\frac{\delta f}{\delta y} = \frac{u(x_0, y_0+\delta y) - u(x_0,y_0)}{i\delta y} + i\,\frac{v(x_0, y_0+\delta y) - v(x_0,y_0)}{i\delta y}$$

$\delta x \neq 0, \delta y = 0$

$z_0 = x_0 + i y_0$

$\delta x = 0, \delta y \neq 0$

Betrachte Grenzwerte
mit
i) $\delta z = \delta x$
ii) $\delta z = i\delta y$

i) $$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} + i \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

ii) $$\lim_{\delta z \to 0} \frac{f(z_0+\delta z) - f(z_0)}{\delta z} = \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} - i \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$$

Da die Funktion komplex differenzierbar ist,
ist der Grenzwert $\delta z \to 0$ unabhängig von der Richtung,
also müssen i) und ii) übereinstimmen

Da u,v und x,y $\in \mathbb{R}$ ergeben sich zwei
Bedingungen (eine für Real- und Imaginärteil)

Cauchy-Riemann Bedingungen (CR)

partielle Differentialgleichungen für $u(x,y)$ und $v(x,y)$

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}}$$

Dementsprechend sind die CR Bedingungen
notwendige Bedingungen für komplexe Differenzierbarkeit
einer Funktion die direkt aus der Existenz des
Grenzwerts folgen