Organisation:

Übungsgruppen A: Stefan Urban Brüning
Di: 14^{00} - 16^{00} U5-133

B: Felix Zraschó
Di: 16^{00} - 18^{00} D6-135

Bisher 22 Anmeldungen für A
9 Anmeldungen für B

Damit ein erfolgreicher Ablauf gewährleistet werden kann suchen wir noch mindestens 5 Freiwillige die von A nach B wechseln

Entscheidung in Ruhe bis nächsten Dienstag

Sollten sich nicht genug Freiwillige finden behalten wir uns vor eine zufällige Umverteilung vorzunehmen

Wiederholung I) Funktionentheorie

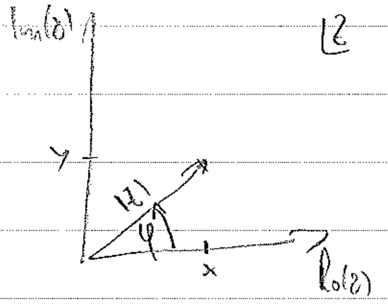
- Einführung der komplexen Zahlen

  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ Körper, Definition von + und ·
- Elementare Rechenoperationen $\bar{z}$, $|z|$, ...
- Darstellung von komplexen Zahlen

cartesische Darstellung

$$z = x + iy$$

$x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$



polare Darstellung

$$z = |z|\left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right)$$

wobei $\varphi = \arg(z)$ das Argument Besonderheit

Erstes Beispiel für eine mehrwertige Abbildung (Multifunktion)

$\varphi \to \varphi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{N}$

liefert selben Punkt

Durch Polarkoordinaten lässt sich eine einfache Darstellung der komplexen Multiplikation finden

$$z_1 z_2 = |z_1| (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)\, |z_2| (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

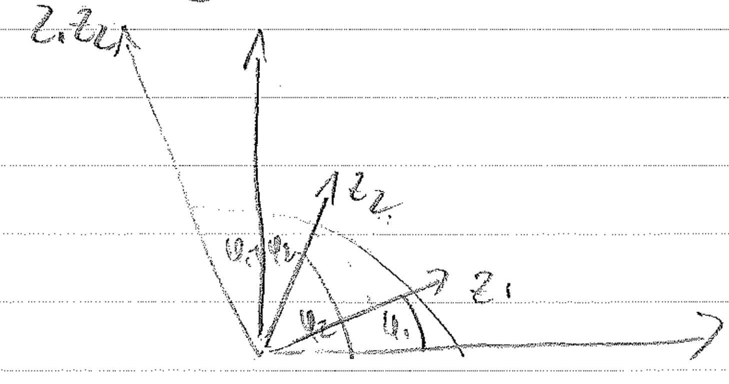
$$= |z_1||z_2| \Big[\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

$$+ i\left(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2\right)\Big]$$

Additionstheorem für sin / cos

$$= |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

geometrisch



Insgesamt ergibt sich

$$z_1 z_2 = \underbrace{|z_1||z_2|}_{\text{Streckung}} \left(\cos\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)} + i \sin\underbrace{(\varphi_1+\varphi_2)}\right)$$

Drehung des Winkels

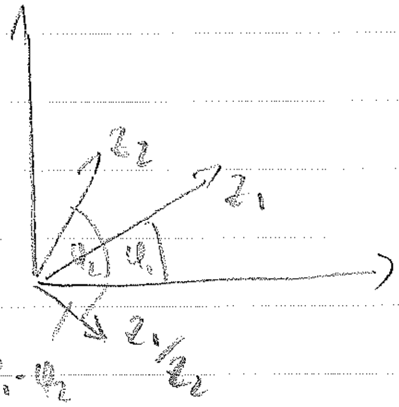
Komplexe Multiplikation entspricht Drehstreckung

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Da Inversion durch Multiplikation mit CC (komplex Konjugation) und skalarer Multiplikation dargestellt werden kann ergibt sich analog

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2\right)$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$



insbesondere für $z_1 = 1$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_2) - i\sin(\varphi_2)\right)$$

Inversion des Betrags und komplexe Konjugation

I.2 Elementare Funktionen von $z \in \mathbb{C}$

Durch Addition & Multiplikation lassen sich bereits einige komplexe Funktionen bilden

Bsp: Polynome von $z \in \mathbb{C}$ $\quad P(z), Q(z)$

Ein Spezialfall ist das Monom

$z \to z^n$ mit $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

Theorem von de Moivre: $\quad z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right)$

Beweis: Benutze $z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$ und verwende Induktion

Eleganter lässt sich das Theorem durch die Euler-Formel beweisen

Dazu schreiben wir $z = |z| \left(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)\right)$ und verwenden die Potenzreihendarstellung der reellen Funktionen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$

$$\cos(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ konvergieren

Durch $i^2=-1$ erhalten wir

$$\cos(\varphi)+i\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n}\frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{i\, i^{2n}}_{=i^{2n+1}} \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Da beide Reihen konvergieren können wir die Summe zusammenfassen

$$\cos(\varphi)+i\sin(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

Vergleich mit der Darstellung der Exponentialfunktion (bisher nur für reelle φ)

$$\exp(i\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!}$$

liefert

$$\boxed{\exp(i\varphi)=\cos\varphi+i\sin\varphi}$$ Euler Formel

Dementsprechend können wir $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ ausdrücken als

$$\boxed{z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)=|z|e^{i\varphi}}$$

Insbesondere ist $|e^{i\varphi}|=|\cos\varphi+i\sin\varphi|=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1$

Durch $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\, e^{i\varphi_1+i\varphi_2}$ gelten die üblichen Rechenregeln der Exponentialfunktion auch für $e^{i\varphi}$, insbesondere ist $e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

$$\Rightarrow \quad z^n=(|z|e^{i\varphi})^n = |z|^n(e^{i\varphi})^n = |z|\,e^{in\varphi} = |z|\,(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$$

Durch Inversion erhalten wir ausgehend von Polynomen zu den Rationalen Funktionen von $z \in \mathbb{C}$

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{für} \quad Q(z) \neq 0$$

Bsp: Möbiustransformation

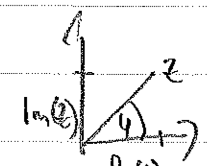
$$R(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

mit $ad-bc \neq 0$ sodass u.a. die Nullstellen des Zählers von den NST des Nenners verschieden sind

Die o.g. Funktionen zeichnen sich dadurch aus, dass sie lediglich von z und nicht von $\bar{z}$ abhängen

Dies ist nicht notwendiger Weise der Fall, insbesondere haben wir bereits einige Funktionen kennengelernt die sowohl von z als auch $\bar{z}$ abhängen

Bsp: $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z+\bar{z})$



$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) = \arctan\left(\frac{\cancel{|z|}\sin\varphi}{\cancel{|z|}\cos\varphi}\right) = \varphi$$

Dieses sind genauso komplexe Funktionen, allerdings haben Funktionen die lediglich von z (und nicht von $\bar{z}$) abhängen wesentlich „schönere" Eigenschaften

$\rightsquigarrow$ Differenzierbarkeit, Analytizität, ...

Die einfachsten Funktionen wie z.B

$$f(z) = z + z_0 \quad \text{(Translation)}$$

$$f(z) = z_0 z \quad \text{(Drehstreckung, } z_0 \neq 0\text{)}$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad \text{(Inversion, } z \neq 0\text{)}$$

bilden $\mathbb{C}$ (bzw $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ für Inversion) bijektiv auf sich selbst ab, d.h. es gibt eine eins-zu-eins Beziehung zwischen Punkten im Bildraum und Urbildraum.

Damit lässt sich eine eindeutige Umkehrfunktion bestimmen z.B

$$f(z) = z - z_0 \text{ für Translation}$$

Dies ist allerdings in vielen Fällen nicht der Fall, wenn Abbildung $f(z)$ nicht injektiv ist, also mehrere Punkte z auf den gleichen Punkt $f(z)$ abgebildet werden

Nichtsdestotrotz lassen sich in diesem Fall mehrwertige Umkehrfunktionen (Multifunktionen) definieren

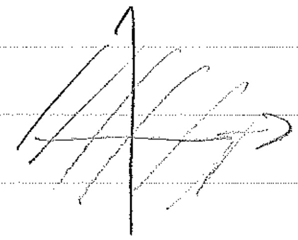
Das einfachste Beispiel für einen solchen Zusammenhang sind Wurzelfunktionen von komplexen Zahlen

Damit wir komplizierte Funktionen charakterisieren, bzw. Definitions- und Bildbereich angeben können benötigen wir einige Definitionen

Diese sind ebenso wichtig für Eigenschaften der Funktionen wie z.B. Differenzierbarkeit oder Singularitäten der Funktion

Gebiete in der komplexen Ebene

- Gesamte komplexe Ebene $\mathbb{C}$



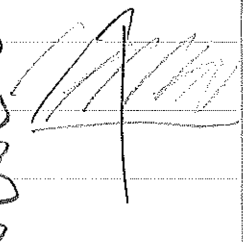
- Halbebenen:

obere Halbebene $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \}$

untere " $H = \{ \text{"} \quad \text{"} < 0 \}$

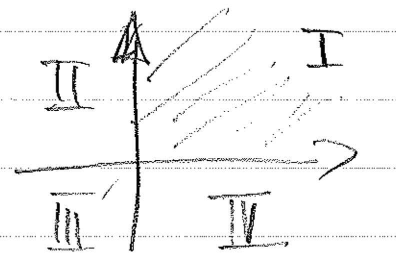
rechte " $H = \{ \text{"} \mid \operatorname{Re}(z) > 0 \}$

linke " $H = \{ \quad \mid \text{"} < 0 \}$

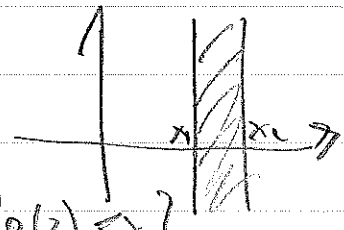


- Quadranten

$\mathrm{I} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0 \;\&\; \operatorname{Re}(z) > 0 \}$

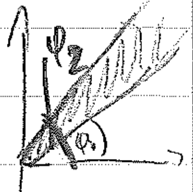


- Streifen



$\{ z \in \mathbb{C} \mid x_1 < \operatorname{Re}(z) < x_2 \}$

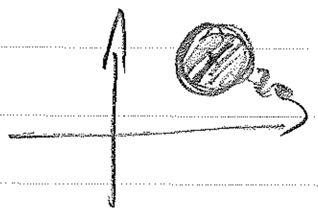
- Sektoren



$\{ z \in \mathbb{C} \mid \varphi_1 < \arg(z) < \varphi_2 \}$

Eine besondere Bedeutung in der komplexen Analysis kommt der Kreisscheibe zu, die wir im Verlauf der Vorlesung immer wieder verwenden werden.

<u>Kreisscheibe</u> $K_R(z_0) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R \}$

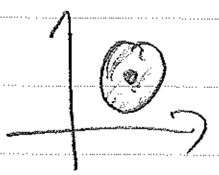


insbesondere ist $K_1(0)$ die Einheitskreisscheibe mit Radius $R=1$ und Mittelpunkt $z_0=0$

Darüber hinaus werden wir punktierte Gebiete benötigen z.B. um Singularitäten einer Funktion auszuschließen

<u>Punktierte Gebiete</u>:

<u>Bsp:</u> Kreisscheibe ohne Mittelpunkt



$K_R(z_0) \setminus \{z_0\}$

Damit wir genauere Mengen klassifizieren können benötigen wir noch einige weitere Begrifflichkeiten, die bereits aus der reellen Analysis geläufig sind

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heisst

<u>offen</u>: $\forall z \in M \; \exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(z) \subseteq M$

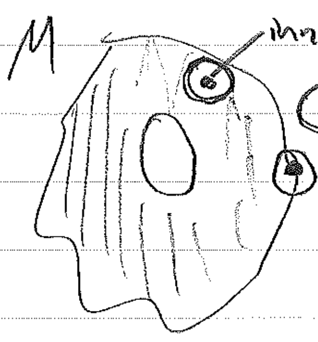
d.h. für jeden Punkt z ist die Kreisscheibe mit Radius ε vollständig in M enthalten

<u>abgeschlossen</u>: $M^c = \mathbb{C} \setminus M$ offen ist

d.h. das Komplement der Menge (also die Menge aller Punkte die nicht in M liegen) offen ist

Dementsprechend ist z.B. die Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ eine offene Menge. (der Rand gehört nicht dazu)

Desweiteren können wir auch die Lage von Punkten $z \in \mathbb{C}$ bezüglich einer Menge M klassifizieren



- innerer Punkt: $\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(z) \subseteq M$
- äusserer Punkt $\exists \varepsilon > 0 : K_\varepsilon(z) \subseteq M^c$
- Randpunkt $\forall \varepsilon > 0 \; \exists z_1, z_2 \in K_\varepsilon(z) :$
  $z_1 \in M \;\&\; z_2 \in M^c$

Dementsprechend bestehen offene Mengen nur aus inneren Punkten

Desweiteren können wir durch hinzufügen oder entfernen der Randpunkte weitere Mengen erhalten

Abschluss: $\overline{M} = M \cup \{\text{alle Randpunkte von } M\}$

offener Kern/Innere: $M^\circ = M \setminus \{\text{alle Randpunkte von } M\}$

Rand: $\partial M = \{\text{alle Randpunkte von } M\}$

Wurzeln von Komplexen Zahlen

Die Wurzeln von reellen Zahlen $\boxed{\sqrt[p]{a} = a^{1/p}}$
ist definiert für $p \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$)
als eine Lösung der Gleichung

$$\boxed{x^p = a}$$

Bsp: $p = 2 \quad a = 4 \quad \sqrt[2]{4} = 4^{\frac{1}{2}} = +2$
löst $x^2 = 4$

Die reelle Wurzelfunktion ist eindeutig, $\sqrt{a} \geq 0$
allerdings hat die entsprechende Gleichung $x^2 = a$
zwei Lösungen nämlich $x = \pm\sqrt{a}$

Diese Eigenschaft lässt sich leicht
verstehen wenn wir uns mit den
Eigenschaften der Abbildung

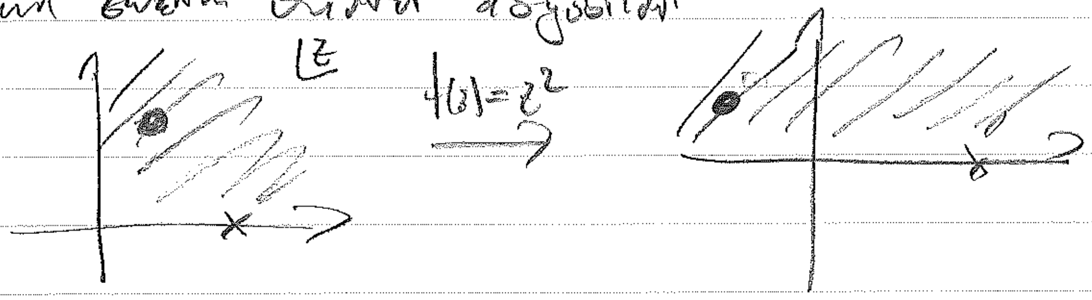
$$f(z) = z^2 \qquad z \in \mathbb{C}$$

beschäftigen.

Da Multiplikation ($z^2 = z \cdot z$) einer
Drehstreckung entspricht ergibt
sich in Polar Koordinaten

$$z = |z| e^{i\varphi} \qquad z^2 = \underbrace{|z|^2}_{\text{Streckung}} \, e^{\overbrace{2i\varphi}^{\text{Verdoppelung des Winkels}}}$$

Da sich der Winkel verdoppelt wird bereits z.B. der erste Quadrant auf den ersten und zweiten Quadrant abgebildet



die obere Halbebene wird auf ganz $\mathbb{C}$ abgebildet.

Wenn wir ganz $\mathbb{C}$ abbilden wird jeder Wert im Bild (ausser 0) genau zweimal angenommen

Dementsprechend gibt es für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ immer genau zwei Lösungen der Gleichung

$$z^2 = a$$

Diese Aussage lässt sich verallgemeinern und stellt ein wichtiges Ergebnis dar, welches nur im Laufe der Vorlesung benutzen werden

<u>Fundamentalsatz der Algebra:</u>

Jedes Polynom $P_n(z)$ vom Grad $n \in \mathbb{N}$ hat genau n Lösungen (Wurzeln) $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ der Gleichung $P_n(z) = 0$

Das einfachste Beispiel hierfür sind

<u>Wurzeln von komplexen Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$</u>

Die n-te Wurzel $w = z^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$ ist definiert als Abbildung von $z \in \mathbb{C}$ nach $w \in \mathbb{C}$ die <u>genau n Lösungen</u> der Gleichung $z = w^n$ gibt

Dies lässt sich am einfachsten in Polarkoordinaten verstehen

mit $z = |z| e^{i\varphi}$ $\qquad w = |w| e^{i\theta}$

gilt

$$w^n = |w|^n e^{in\theta} = |w|^n \left(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \right)$$

Damit die Bedingung

$$|z|\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = |w|^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

erfüllt ist müssen Re und Im übereinstimmen

D.h. insbesondere muss der Betrag identisch sein, also

$$|w| = \sqrt[n]{|z|} \quad \text{(reelle Wurzelfunktion)}$$

Der Winkel ist allerdings nicht eindeutig

da $\cos(n\theta) = \cos(n\theta + 2\pi k)$ und

$\sin(n\theta) = \sin(n\theta + 2\pi k)$

Dementsprechend sind

$$\theta = \frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

die Lösungen der Gleichung

<u>D.h. im Gegensatz zur reellen Wurzelfunktion ist die komplexe Wurzel nicht eindeutig</u>

Die Eindeutigkeit kann analog zu arg(z) durch Beschränkung auf einen Zweig hergestellt werden,

<u>$k=0$</u> Hauptzweig $\quad$ $k=1,\dots,n-1$ Nebenzweige