Konvolutionen:

Betrachte $g(t)$ und $h(t)$ mit Laplacetransformierten

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right](p) = G(p) = \int_0^\infty dt\; e^{-pt}\, g(t)$$

$$\mathcal{L}\left[h(t)\right](p) = H(p) = \int_0^\infty dt\; e^{-pt}\, h(t)$$

Bei Fouriertransformationen haben wir gesehen dass Konvolutionen $\overset{FT}{\longleftrightarrow}$ Produkte ergeben, daher betrachten wir

$$G(p)\,H(p) = \int_0^\infty dt\; e^{-pt}\, g(t) \int_0^\infty dt'\; e^{-pt'}\, h(t')$$

$$= \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt'\; e^{-p(t+t')}\; g(t)\, h(t')$$

Damit wir das wieder als Laplacetransformation erkennen

Substitution: $x(t') = (t+t')$ bei festem t

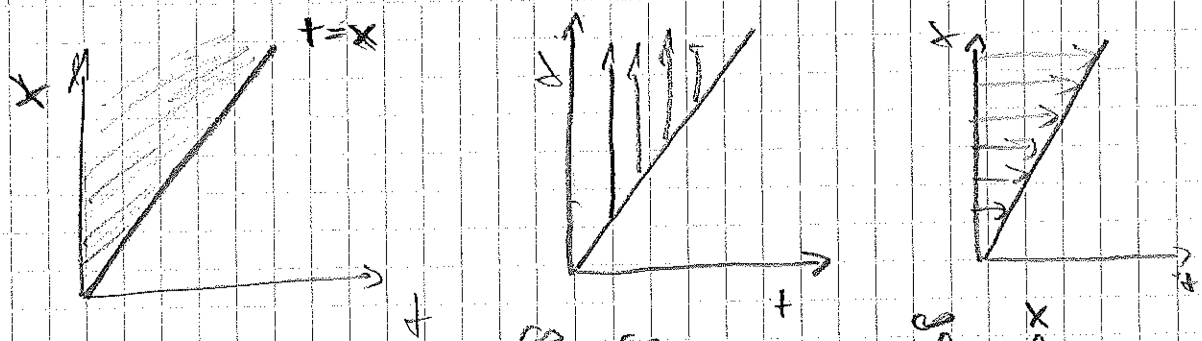
Integralgrenzen $x(t'=0) = t \qquad x(t' \to \infty) \to \infty$

$$G(p)\,H(p) = \int_0^\infty dt \int_t^\infty dx\; e^{-px}\; g(t)\, h(x-t)$$

Damit wir den Ausdruck als Laplacetransformation erkennen können müssen wir noch die Integrationsreihenfolge vertauschen.

Hierbei ist zu berücksichtigen dass wir nur über den Bereich $\boxed{x > t}$ integrieren

D.h.



$$\int_0^\infty dt \int_0^\infty dx \; \theta(x-t) = \int_0^\infty dt \int_t^\infty dx = \int_0^\infty dx \int_0^x dt$$

Wählen wir die letzte Parametrisierung so erhalten wir

$$G(p)\,H(p) = \int_0^\infty dx \; e^{-px} \underbrace{\int_0^x dt \; g(t)\, h(x-t)}_{=}$$

Die Konvolution $(g * h)(x)$ ist anders als bei der Fouriertransformation

D.h. es gilt

$$\boxed{\mathcal{L}\left[(g*h)(x)\right](p) = \mathcal{L}\left[g(x)\right](p)\; \mathcal{L}\left[h(x)\right](p)}$$

und entsprechend

$$(g*h)(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\mathcal{L}[g]\,\mathcal{L}[h]\right](x)$$

also explizit

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[G(p)\,H(p)\right] = \int_0^x dt \;\; g(t)\, h(x-t)}$$

Beispiele für Anwendung der Laplacetransformation

Gedämpfter harmonischer Oszillator

$$\left(\partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2\right) x(t) = f(t)$$

als Anfangswertproblem $\quad x(t=0) = x_0$

$$\dot{x}(t=0) = \partial_t x(t)\big|_{t=0} = v_0$$

① Laplacetransformation der Gleichung

$$L[f(t)](p) = F(p)$$

$$L[x(t)](p) = X(p)$$

$$L[\dot{x}(t)](p) = -x(t=0) + p\,L[x(t)](p) = -x_0 + p\,X(p)$$

$$L[\ddot{x}(t)](p) = -\dot{x}(t=0) - p\,x(t=0) + p^2 L[x(t)](p)$$

$$= -v_0 - p x_0 + p^2 X(p)$$

Bewegungsgleichung im Laplaceraum

$$\left(p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2\right) X(p) = 2\gamma x_0 + v_0 + p x_0 + F(p)$$

② Lösung im Laplaceraum

$$X(p) = \underbrace{\frac{F(p)}{p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2}}_{\text{inhomogene Lösung}} + \underbrace{\frac{2\gamma x_0 + v_0 + p x_0}{p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2}}_{\text{homogene Lösung}}$$

③ Bestimmung der Lösung $x(t)$ durch inverse Laplacetransformation

$$X(p) = \underbrace{\frac{F(p)}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2}}_{} + \frac{v_0+\gamma x_0}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2} + \frac{(p+\gamma)x_0}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2}$$

Produkt im Laplaceraum $\xrightarrow{L^{-1}}$ Konvolution im Zeitraum

D.h. wenn wir das Konvolutionstheorem verwenden benötigen wir lediglich zwei inverse Laplacetransformationen

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2}\right] \quad \text{und} \quad L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2}\right]$$

Bestimmung möglich durch

A) Komplexe Konturintegrale

B) Partialbruchzerlegung

C) Tabellen

Wir verwenden C) und Schreiben zunächst

$$\frac{1}{p^2+2\gamma p+\omega_0^2} = \frac{1}{(p+\gamma)^2+\underbrace{\omega_0^2-\gamma^2}_{=\omega_1^2}}$$ Betrachte $\omega_1^2 \neq 0$

Vergleiche mit sin/cos

$$L[\sin(\omega_1 t)](p) = \frac{\omega_1}{p^2+\omega_1^2}$$

$$L[\cos(\omega_1 t)](p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

Benutzen wir zusätzlich

$$L[f(t)](p+k) = \int_0^\infty dt\, e^{-(p+k)t} f(t) = \int_0^\infty dt\, e^{-pt} e^{-kt} f(t)$$
$$= L[e^{-kt} f(t)](p)$$

dann ist

$$L[e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)] = \frac{\omega_1}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2}$$

$$L[e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t)] = \frac{(p+\gamma)}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2}$$

Damit ist

$$L^{-1}\left[\frac{v_0+\gamma x_0}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2} + \frac{(p+\gamma)x_0}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2}\right](t)$$

$$= x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t) + (v_0+\gamma x_0)\,\frac{e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)}{\omega_1}$$

Was gerade der Lösung des homogenen Problems entspricht

$$L^{-1}\left[\frac{F(p)}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2}\right] = \int_0^t dt_0\, L^{-1}\left[\frac{1}{(p+\gamma)^2+\omega_1^2}\right](t-t_0)\, f(t_0)$$

$$= \int_0^t dt_0\, \frac{e^{-\gamma(t-t_0)}\sin(\omega_1(t-t_0))}{\omega_1}\, f(t_0)$$

D.h. insgesamt erhalten wir

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t}\cos(\omega_1 t) + (v_0+\gamma x_0)\,\frac{e^{-\gamma t}\sin(\omega_1 t)}{\omega_1} + \int_0^t dt_0\, \frac{e^{-\gamma(t-t_0)}\sin(\omega_1(t-t_0))}{\omega_1} f(t_0)$$

das heißt der Kraftterm ist kausal, also lediglich Kräfte zwischen $(0,t)$ beeinflussen den Oszillator zur Zeit t