Wiederholung: Laplacetransformation

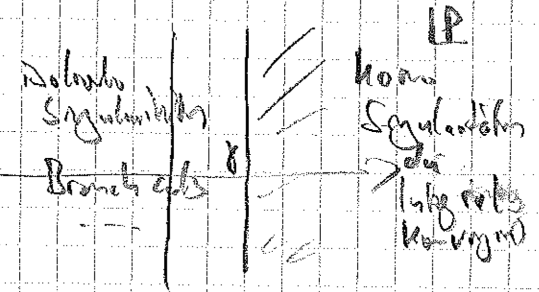
$$L[f(t)](p) = \bar{f}(p) = \int_0^\infty dt\; f(t)\, e^{-pt} \qquad p \in \mathbb{C}$$

Existenz des Integrals wenn $f(t)$ keine nicht integrablen Singularitäten besitzt und höchstens exponentiell anwächst

$$t \to \infty: \quad |f(t)| \le C e^{\gamma t}$$

dann konvergiert das Integral für $\mathrm{Re}(p) > \gamma$

Durch analytische Fortsetzung ~~$\bar{f}(p)$ für Re~~
erhalten wir $\bar{f}(p)$ für
$p \in \mathbb{C}$ (analytisch für $\mathrm{Re}(p) > \gamma$)



Beispiele: $L[e^{kt}](p) = \frac{1}{p-k}$ einfacher Pol bei $p=k$

Übungen: $L[t^n e^{kt}](p) = \frac{n!}{(p-k)^{n+1}}$ $n+1$ facher Pol bei $p=k$

Eigenschaften bzgl. Ableitungen

$$L[f'(t)](p) = p\bar{f}(p) - f(0)$$

$$L[f''(t)](p) = p^2 \bar{f}(p) - p f(0) - f'(0) \quad \text{usw}$$

Benötige Inverse Laplacetransformation zur Lösung physikalischer Probleme

Inverse Laplace transformation:

Wie bei Fouriertransformation benötigen wir inverse Laplace transformation bei der Lösung physikalischer Probleme

Einfachste Möglichkeit ist Tabelle mit

$f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]$

wo man inverse oftmals ablesen kann

Darüber hinaus existiert eine Integraldarstellung womit wir die inverse Laplacetransformation analog der inversen Fouriertransformation berechnen können

Betrachte zunächst Fouriertransformation von $f(t)$, ... u. 1 zugehörige inverse erinnert

$$\forall t \text{ gilt } f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, \delta(t-t') \, f(t')$$

$$\underset{\delta\text{-Darstellung}}{\overset{\text{Fourier Darstellung}}{=}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, e^{i\omega(t-t')} \, f(t')$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, e^{i\omega t} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, e^{-i\omega t'} f(t')}_{= \tilde{f}(\omega)}$$

Fouriertransformation

$$\Rightarrow \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, e^{i\omega t} \, \tilde{f}(\omega)$$

Inverse Fouriertransformation

Betrachte nun Laplace transformation

Betrachte ausschließlich $t>0$, da Laplace trafo nur positive Werte berücksichtigt

$$f(t) = \int_0^\infty dt'\, \delta(t-t')\, f(t')\, e^{\gamma(t-t')}$$

$$= \int_0^\infty dt' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(t-t')}\, f(t')\, e^{\gamma(t-t')}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{(i\omega+\gamma)t} \underbrace{\int_0^\infty dt'\, e^{-(\gamma+i\omega)t'}\, f(t')}_{\text{Laplace transformation von } f(t) \text{ bzw. komplexem } p=\gamma+i\omega}$$

Wenn γ hinreichend groß gewählt ist existiert $\mathcal{L}[f(t)](\gamma+i\omega)$ für alle $\omega\in\mathbb{R}$, und hier kann die obige Formel zur Inversion verwendet werden.

Durch Variablenwechsel

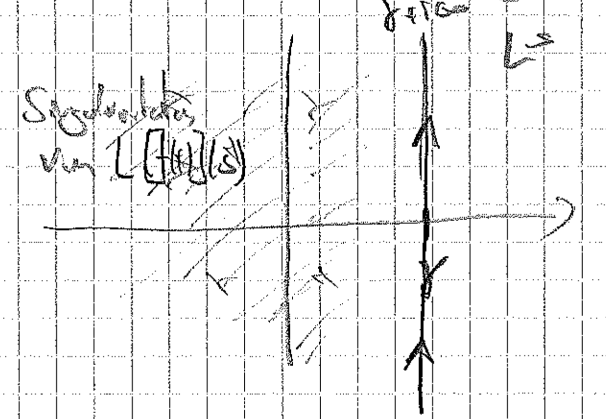
$s(\omega) := \gamma + i\omega$ mit $\mathrm{Re}(s) = \gamma$ hat, so dass $\mathcal{L}[f(t)](s)$ keine Singularitäten enthält

erhalten wir mit $\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{ds}{2\pi i}$ und Grenzen $s(\omega=\pm\infty) = \gamma \pm i\infty$

$$\boxed{f(t) = \underbrace{\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}}_{\mathcal{L}^{-1}[\cdot]} \underbrace{\int_0^\infty dt'\, e^{-st'}\, f(t')}_{\mathcal{L}[f(t)](s)}}$$

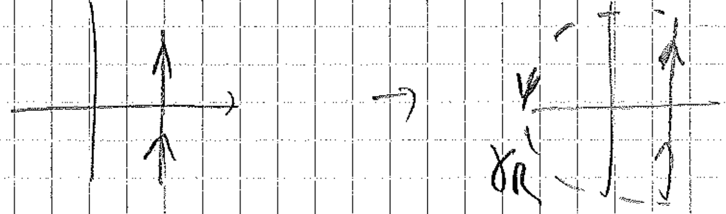
$\mathcal{L}[f(t)](s)$ analytisch fortgesetzt für komplexe s

D.h. in der komplexen Ebene entspricht der inversen Laplacetransformation dem folgenden Integral



Da $$f(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}\, L[f(t)](s)$$

bietet es sich bei der Berechnung der inversen Laplacetransformation an, die Contour zu einer geschlossenen Kontour zu erweitern



Betrachte nun $$\int_{\gamma_R} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}\, L[f(t)](s)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{d\varphi}{2\pi}\, iRe^{i\varphi}\, e^{tR\cos\varphi + itR\sin\varphi}\, L[f(t)](Re^{i\varphi})$$

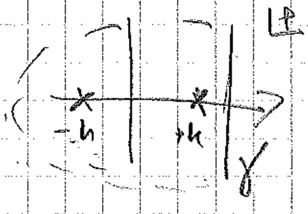
Dann ist $\cos(\varphi) \leq 0$ für $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ und daher typischer Weise

$$\int_{\gamma_R} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}\, L[f(t)](s) = 0$$

so dass wir die inverse Laplacetransformation oftmals mittels Residuensatz berechnen können

Beispiel:

Betrachte $L[f(t)](p) = \frac{k}{p^2-k^2}$ dann sind für $p \in \mathbb{C}$, i.e. also die analytisch fortgesetzte Funktion, die Singularitäten einfache Pole bei $p = \pm k$



$\Rightarrow$ Wähle $\gamma > k$ so dass $L[f(t)](p)$ für $Re(p) \geq \gamma$ keine Singularitäten mehr besitzt

$$f(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}\, \frac{k}{p^2-k^2} \overset{\text{Schließe Kontur}}{=} \int_{\gamma \oplus \gamma_R} \frac{ds}{2\pi i}\, e^{st}\, \frac{k}{p^2-k^2}$$

da Beiträge durch Bogen wie üblich verschwinden

Bestimme des Integrals mittels Residuensatz

Umlaufzahl: $V_{\gamma \cup \gamma_R}(\pm k) = 1$ beide Pole einfach umlaufen

Residuen:
$$\operatorname{res}_{s=k}\left(\frac{ke^{st}}{s^2-k^2}\right) = \operatorname{res}_{s=k}\left(\frac{k \cdot e^{st}}{(s-k)(s+k)}\right) = \frac{ke^{kt}}{2k} = \frac{e^{kt}}{2}$$

$$\operatorname{res}_{s=-k}\left(\frac{ke^{st}}{s^2-k^2}\right) = \frac{ke^{-kt}}{-2k} = -\frac{e^{-kt}}{2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}}_{\text{from } \oint \frac{ds}{2\pi i}}\left(2\pi i\, V(k) \operatorname{res}_k() + 2\pi i\, V(-k) \operatorname{res}_{-k}()\right)$$

$$= \frac{e^{kt}}{2} - \frac{e^{-kt}}{2} = \sinh(kt)$$

Bemerkung: Die Berechnung der inversen Laplacetransformation mit Hilfe der obigen Kontur ist nur dann möglich wenn der Bogen verschwindet und der Integrand keine Schnitte aufweist. Ansonsten muss die Integrationskontur anders gewählt werden und im Problemfall Schnittstellen umgehen

__Beispiel:__ Betrachte $L[f(t)](p) = \frac{k^2}{p(p^2-k^2)}$

Singularitäten bei $p=0$ und $p=\pm k$

$\Rightarrow$ Durch analoge Berechnung bekommen wir Residuen bei

$$\operatorname{res}_{p=0}\left(\frac{k^2}{p(p^2-k^2)}\right) = -1 \quad \overset{\text{Inverse Laplace Transformation}}{\Longrightarrow} \quad -1\,e^{0t} = -1$$

$$\operatorname{res}_{p=k}\left(\frac{k^2}{p(p^2-k^2)}\right) = +\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{kt}}{2}$$

$$\operatorname{res}_{p=-k}\left(\frac{k^2}{p(p^2-k^2)}\right) = +\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-kt}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \cosh(kt) - 1$$

Eine alternative Weise für Berechnung ist durch Partialbruchzerlegung

$$\frac{k^2}{p(p^2-k^2)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p-k} + \frac{c}{p+k}$$

$$\Rightarrow \quad k^2 = a(p^2-k^2) + b\,p(p+k) + c\,p(p-k)$$

Setze $p=0$ $\Rightarrow$ $a=-1$ Setze $p=k$: $b=\frac{1}{2}$ Setze $p=-k$: $c=+\frac{1}{2}$

Daher ist
$$\frac{k^2}{p(p^2-k^2)} = \underbrace{\frac{-1}{p}}_{=L[-1](p)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{p-k}}_{=L[\frac{1}{2}e^{kt}](p)} + \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{p+k}}_{=L[\frac{1}{2}e^{-kt}](p)}$$

so dass $= L[-1](p)$, $= L[\frac{1}{2}e^{kt}](p)$, $= L[\frac{1}{2}e^{-kt}](p)$

und wir können die inverse Laplace transformation direkt ablesen