Klausur: Termine

Di 18.02 H14 $12^{00} - 15^{00}$

Di 17.03 H14 $12^{00} - 15^{00}$

Bearbeitungszeit ≈ 2-2.5 h ca.

Inhalte: Vorlesung & Übungen

- Klausur wird sich an Übungsaufgaben orientieren
- Erste Klausur wird einfacher als zweite Klausur

Hilfsmittel: 1 DIN A4 BLATT EINSEITIG

BESCHRIEBEN MIT BELIEBIGEM INHALT

Wiederholung: Fouriertransformation (FT)

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{x}\; e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, f(\vec{x})$$ Fouriertransformation

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\; e^{+i\vec{k}\vec{x}}\, \tilde{f}(\vec{k})$$ Inverse Fouriertransformation

Ableitungen: $\mathcal{F}\left[\partial_{x_j} f(\vec{x})\right](\vec{k}) = i k^j\, \tilde{f}(\vec{k})$

$$\mathcal{F}\left[\vec{\nabla} f(\vec{x})\right](\vec{k}) = i\vec{k}\, \tilde{f}(\vec{k})$$

Ableitungen $\overset{FT}{\Longleftrightarrow}$ Produkte im Fourierraum

---

Darstellung der δ-Funktion:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d}\; e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} = \delta^{(d)}(\vec{x}-\vec{y})$$ d-Dimensionale δ-Distribution

Konvolutionstheorem

$$f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d\vec{y}\; g(\vec{y})\, h(\vec{x}-\vec{y})$$

Konvolutionen $\overset{FT}{\Longleftrightarrow}$ Produkte

$$\mathcal{F}[f(\vec{x})](\vec{k}) = \tilde{g}(\vec{k})\, \tilde{h}(\vec{k})$$

$$f(\vec{x}) = g(\vec{x})\, h(\vec{x})$$

$$\mathcal{F}[f(\vec{x})](\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{d^d\vec{q}}{(2\pi)^d}\; \tilde{g}(\vec{q})\, \tilde{h}(\vec{k}-\vec{q})$$

Beispiel für physikalische Anwendung - Diffusionsgleichung in 1D

$$\partial_t \phi(x,t) = D\, \partial_x^2 \phi(x,t) \overset{FT_x}{\Longrightarrow} \partial_t \tilde{\phi}(k,t) = -D k^2 \tilde{\phi}(k,t) \overset{\text{Lösen}}{\Longrightarrow} \tilde{\phi}_0(k,t) \overset{\text{Inv-FT}}{\Longrightarrow} \phi_0(x,t)$$

Betrachte als nächstes Beispiel harmonischen Oszillator

$$\left(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t + \omega_0^2\right) \phi(t) = \delta(t - t_0) \quad \leftarrow \text{Kick bei } t = t_0$$

inhomogene DGL zweiter Ordnung

allgemeine Lösung $\Rightarrow \quad \phi(t) = \phi_{Hom}(t) + G(t, t_0)$

mit $\left(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t - \omega_0^2\right) \phi_{Hom}(t) = 0$ allgem. homogene Lösung

und $\left(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t - \omega_0^2\right) G(t, t_0) = \delta(t - t_0)$ spezielle inhomogene Lösung

Greens Funktion des gedämpften harmonischen Oszillators

$$\phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} dt_0 \, G(t, t_0) \, f(t_0) \Rightarrow \left(\partial_t^2 + \varepsilon \partial_t + \omega_0^2\right) \phi_f(t) = f(t)$$

D.h. im $\lim_{\varepsilon \to 0}$ kennen wir die Lösungen

$$\phi_{Hom}(t) = x_0 \cos(\omega_0 (t - t_0)) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 (t - t_0))$$

$$G(t, t_0) = \frac{1}{\omega_0} \Theta(t - t_0) \sin(\omega_0 (t - t_0))$$

Bei Lösung mit Fouriertransformation

$$\left(-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2\right) \tilde{\phi}_{Hom}(\omega) = 0$$

benötigt die Kenntnis einer singulären Information für $\left(-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2\right) = 0$

wohingegen

$$\left(-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2\right) \tilde{G}(\omega, t_0) = e^{-i\omega t_0}$$

$$\Rightarrow \tilde{G}(\omega, t_0) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2 + i\varepsilon\omega + \omega_0^2}$$

die Lösung im Frequenzraum liefert

Bei der Berechnung der Inversen Fouriertransformation müssen wir

$$G(t,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t_0}}{-\omega^2+i\varepsilon\omega+\omega_0^2} e^{i\omega t} \quad \text{berechnen}$$

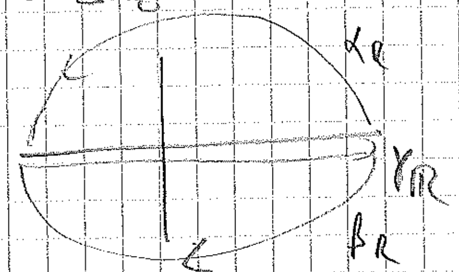
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{-\omega^2+i\varepsilon\omega+\omega_0^2}$$

$\leftarrow$ holomorph (Zähler)

$\leftarrow$ Polynom (Nenner)

$\Rightarrow$ Voraussetzungen zur komplexen Kurvenintegral und Residuensatz

Residuensatz



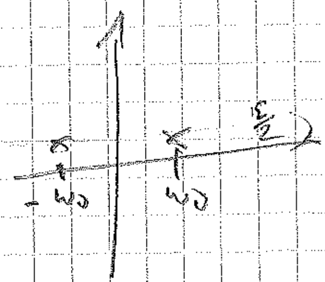
Wegen $e^{i\omega(t-t_0)}$ Faktor müssen wir für $t > t_0$ α_R und für $t < t_0$ β_R zum schließen der Kurve verwenden

Betrachten wir allerdings nun die Singularitäten des Integranden

$$f(\omega) = \frac{e^{i\omega(t-t_0)}}{-\omega^2+i\varepsilon\omega+\omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ Singularitäten bei $-\omega^2+i\varepsilon\omega+\omega_0^2 = 0$

Insbesondere im $\lim_{\varepsilon\to 0}$ $\omega = \pm\omega_0 + \frac{i\varepsilon}{2}$



d.h. beide Singularitäten werden von $\gamma_R \cup \alpha_R$ eingeschlossen, aber keine von $\gamma_R \cup \beta_R$

Die Residuen im $\lim_{\varepsilon\to 0}$ sind

$$\operatorname{res}_{\omega_0+\frac{i\varepsilon}{2}}\big(f(\omega)\big) = -\frac{e^{i\omega_0(t-t_0)}}{2\omega_0} \qquad \operatorname{res}_{-\omega_0+\frac{i\varepsilon}{2}}\big(f(\omega)\big) = +\frac{e^{i\omega_0(t-t_0)}}{2\omega_0}$$

D.h. mit Residuensatz erhalten wir

für $t-t_0>0$: $$G(t,t_0) = \underbrace{\frac{2\pi i}{2\pi}}_{\int \frac{d\omega}{2\pi}}\left(\frac{e^{+i\omega_0(t-t_0)}}{-2\omega_0} + \frac{e^{-i\omega_0(t-t_0)}}{2\omega_0}\right)$$

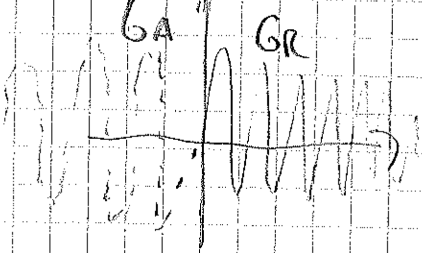
$$= \frac{\sin(\omega_0(t-t_0))}{\omega_0}$$

und für $t-t_0<0$ $\quad G(t,t_0) = 0$

Zusammenfassung der Fälle liefert

$$\Rightarrow \quad G(t,t_0) = \frac{1}{\omega_0}\,\Theta(t-t_0)\,\sin(\omega_0(t-t_0))$$

D.h. mit Hilfe der Fouriertransformation können wir zwar eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL bestimmen (entsprechend Green-Funktion) allerdings nicht die allgemeine Lösung oder die Lösung zu speziellen Anfangsbedingungen



<u>Bemerkung</u>: Durch unsere Wahl $\varepsilon>0$ und anschließende Betrachtung $\lim_{\varepsilon\to 0}$ haben wir die <u>retardierte</u> Green's Funktion G_R gefunden. $G_R(t,t_0) \propto \Theta(t-t_0)$. Ebenso hätten wir für $\varepsilon<0$ die <u>avancierte</u> Green's Funktion G_A bestimmen können.