II.4 Fourierreihen

Darstellung von Funktionen bisher durch Potenz- oder Laurentreihen

Nicht immer besonders effizient, z.B. für periodische Funktionen $\sin(x)/\cos(x)$ benötigen ~~oft~~ viele Terme in Potenzreihendarstellung, viele Eigenschaften nicht offensichtlich

Elemente eines Funktionenraums lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen $\rightarrow$ Basiswechsel

Betrachte nun folgende periodische Funktion $f(x)$

Def.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode L wenn $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x+L) = f(x)$

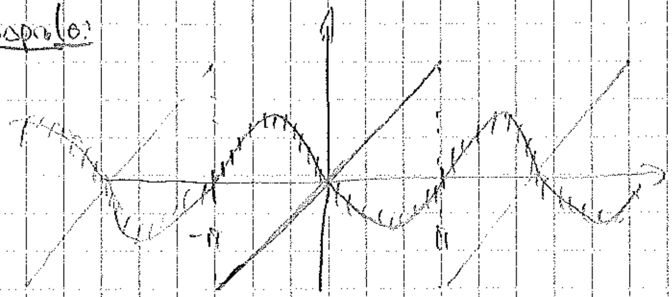
$$\Rightarrow f(x+nL) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Da sich eine periodische Funktion also "wiederholt" lässt sich die Definition auf ein Intervall oBdA $[-\pi, \pi]$ beschränken, nämlich mit

$$F(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+\pi)\right) = F(x + n2\pi)$$

wenn $f(x)$ periodisch mit Periode L

Beispiele:



Damit wir eine solche Funktion effizient darstellen können suchen wir ONB auf $[-\pi, \pi]$ mit Skalarprodukt

$$\boxed{\langle f | g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; f^*(x) \, g(x)}$$

Betrachte hierzu als Ansatz

$\cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$\sin(mx)$, $m = 1, 2, \ldots$

benötige sin und cos, da gerade und ungerade Anteile von f dargestellt werden sollen

Betrachte zunächst Orthogonalitätsbeziehungen

$$\langle \cos, n | \sin, m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \underbrace{\cos(nx)}_{\text{gerade}} \underbrace{\sin(mx)}_{\text{ungerade}} = 0$$

$$\langle \sin, n | \sin, m \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \sin(nx) \sin(mx)$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \; \left(e^{inx} - e^{-inx}\right)\left(e^{imx} - e^{-imx}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \left[e^{i(n+m)x} - e^{i(m-n)x} - e^{i(n-m)x} + e^{-i(n+m)x} \right]$$

Beachte $\displaystyle \int_{-\pi}^{\pi} dx \; e^{ikx} = \begin{cases} \left. \frac{e^{ikx}}{ik} \right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{ik\pi}}{ik}\left(1 - e^{-2\pi i k}\right) = 0 & k \in \mathbb{Z} \wedge k \neq 0 \\ 2\pi & k = 0 \end{cases}$

$$= -\frac{1}{4\pi} \Big[\underset{n+m>0}{0} - 2\pi \delta_{mn} - 2\pi \delta_{mn} + \underset{n+m}{0} \Big]$$

$$\boxed{\langle \sin, n | \sin, m \rangle = \delta_{m,n}} \quad ✓$$

analog

$$\langle \cos, n | \cos, m\rangle = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx \left[e^{i(m+n)x} + e^{i(m-n)x} + e^{i(n-m)x} + e^{-i(m+n)x}\right]$$

da für cos auch $m=0$ und $n=0$ zugelassen sind müssen wir hier noch unterscheiden

$$\boxed{\langle \cos n | \cos m\rangle = \begin{cases} \delta_{mn} & \text{sonst} \\ 2 & m=n=0 \end{cases}}$$

D.h. für $n=0$ sollten wir besser

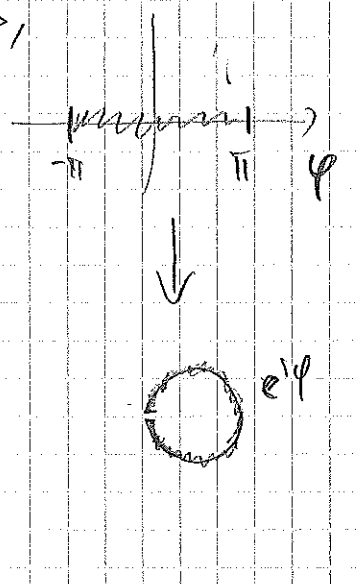
$$|n=0\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(0x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

als Basiselement betrachten

Damit die Menge der Elemente tatsächlich eine Basis bildet müssen wir noch zeigen dass die Basis vollständig ist, also dass wir eine beliebige periodische Funktion auf $[-\pi,\pi]$ durch Linearkombination von sin und cos darstellen können

Betrachte hierzu $f(\varphi)$ periodisch als Funktion auf dem komplexen Einheitskreis, d.h. schreibe

$$f(\varphi) = g(z)\Big|_{z=e^{i\varphi}}$$



Dann können wir unter geeigneten Voraussetzungen $g(z)$ als Laurentreihe darstellen

$$f(\varphi) = g(z)\Big|_{z=e^{i\varphi}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \Big|_{z=e^{i\varphi}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$$

$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos(n\varphi)$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} i(c_m - c_{-m}) \sin(m\varphi)$$

was der gewünschten Darstellung entspricht.

Damit gilt also die Darstellung als trigonometrische Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mx)$$

oder alternativ in Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

Die Koeffizienten der Darstellungen also a_n, b_n für sin/cos und c_n für exp sind wie bereits gesehen miteinander verknüpft

$$c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}} \qquad c_k = \frac{a_k - i b_k}{2} \quad k > 0$$

$$c_k = \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} \quad k < 0$$

oder umgekehrt

$$a_0 = \sqrt{2}\, c_0 \qquad a_n = (c_n + c_{-n}) \qquad b_n = i\,(c_n - c_{-n})$$

Die Tatsache dass $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ ausdrücken lässt legt nahe dass $\{e^{ikx}\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ eine Basis des Funktionenraums ist.

Die Normierung ist allerdings anders als bei sin/cos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\; e^{-ikx} e^{ilx} = 2\pi\, \delta_{kl}$$

d.h. damit $\{e^{ikx}\}$ orthonormal sind müssen sie entweder durch $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ normiert werden, oder die Definition des Skalarprodukts geändert werden

$$\langle f | g \rangle_{exp} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx\; f^*(x)\, g(x)$$

Durch die Kenntnis der Basis gewährleistet wissen wir nun dass sich eine periodische Funktion durch Fourierreihen darstellen lässt. Die entsprechenden <u>Fourierkoeffizienten</u> lassen sich dementsprechend mit Hilfe des Skalarprodukts bestimmen

ONB $\{e_i\}$ $\Rightarrow$ $|f\rangle = f_i |e_i\rangle$ mit $f_i = \langle e_i | f \rangle$

d.h. wir erhalten <u>trigonometrische Koeffizienten</u>

$$a_0 = \langle \cos, 0 | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$$

$$a_k = \langle \cos, k | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \cos(kx) f(x) \qquad k = 1, 2, \dots$$

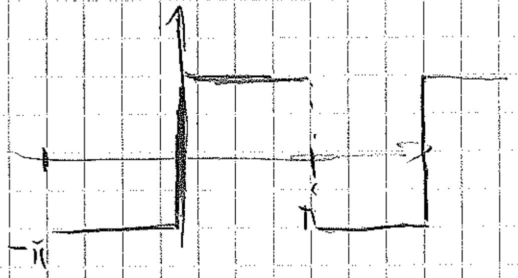
$$b_k = \langle \sin, k | f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \sin(kx) f(x) \qquad \text{"}$$

bzw. hier <u>Fourierkoeffizienten</u> in exponentieller Darstellung

$$c_k = \langle k | f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, e^{-ikx} f(x)$$

Beispiel: On/Off Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi, 0] \\ +1 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$



Da f ungerade ist besteht die trigonometrische Reihe nur $\sin(kx)$ Terme.

$$a_k = 0 \quad \forall k \quad \text{(einfach nachzurechnen)}$$

Bestimmung von b_k

$$b_k = \langle \sin(kx), f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, \sin(kx) \, f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} dx \, \sin(kx) \, (-1) + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} dx \, \sin(kx) \, (+1)$$

$$\overset{\sin(kx) = -\sin(-kx)}{=} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} dx \, \sin(kx) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos(kx)}{k} \right)_{x=0}^{x=\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left(-\cos(k\pi) + 1 \right) = \begin{cases} \frac{4}{\pi k} & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit sind alle Koeffizienten bestimmt und es gilt

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2l+1)} \sin((2l+1)x)$$

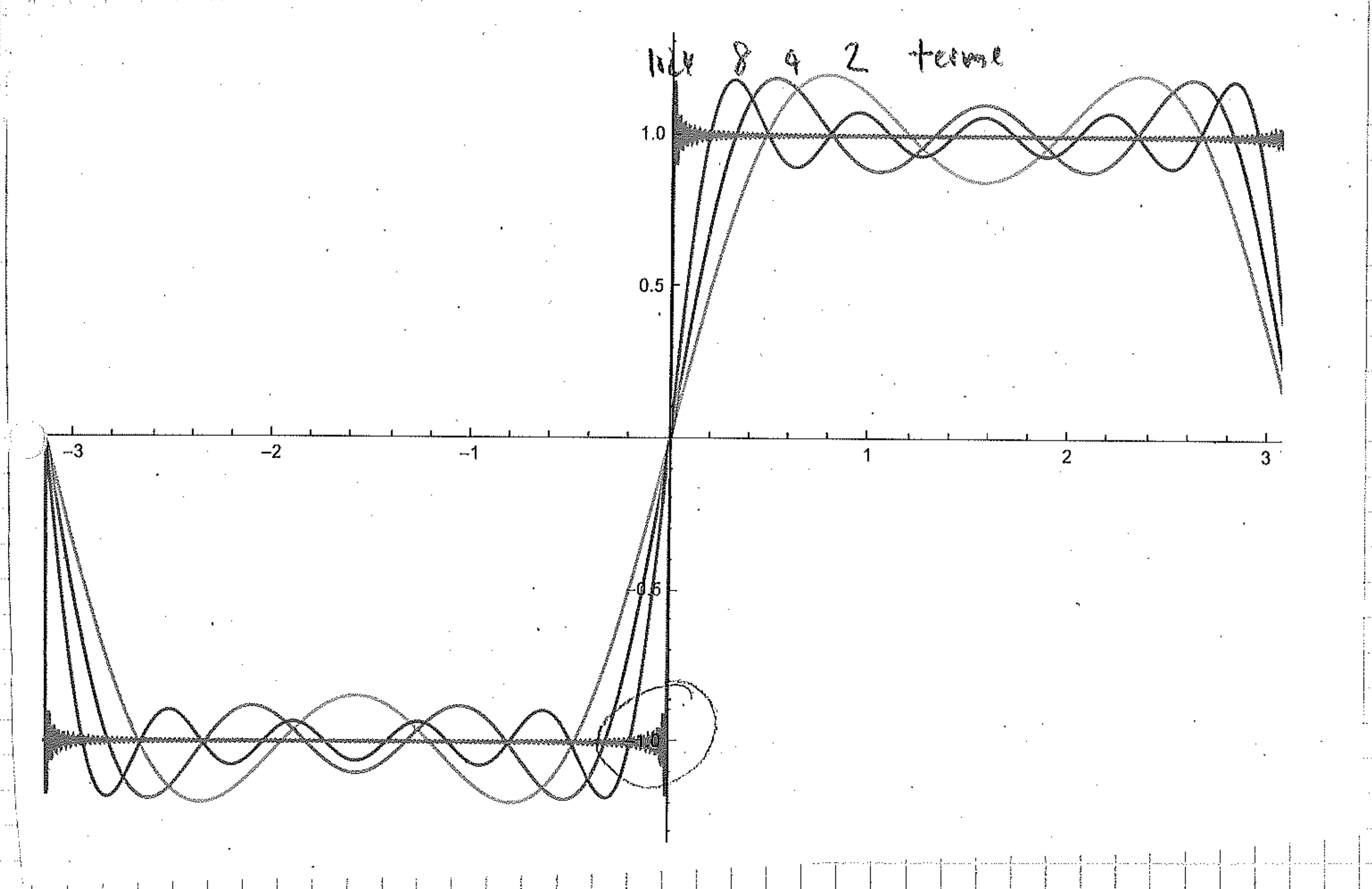
Bemerkungen zur Konvergenz von Fourierreihen

Bei der Fourierreihe handelt es sich streng genommen um den Grenzwert einer Funktionenfolge:

$$f_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_n e^{ikx}$$

Da die Konvergenzeigenschaften vom betrachteten Punkt x abhängen können existieren hierfür verschiedene Konvergenzbegriffe

<u>Bsp:</u> Fourierreihe der On/Off Funktion



Der offensichtlichste Konvergenzbegriff für $f_n: [a,b] \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto f_n(x)$ ist

Punktweise Konvergenz in x_0 in x_0: Bestimme das Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall \ n \geq N$$

allerdings werden hierbei die globalen Eigenschaften der Funktionenfolge berücksichtigt, sondern lediglich das Verhalten an einzelnen Punkten untersucht

Gleichmäßige Konvergenz in der Umgebung eines Punktes $x_0 \in (a,b)$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} :$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall \ x \in [a,b] : |x - x_0| < \delta$$
$$\forall \ n \geq N$$

d.h. der Grenzwert wird lokal gleichmäßig angenommen

Konvergenz im quadratischen Mittel

$$\exists f : \lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^2 = 0$$

wobei $\|f - f_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx \, |f(x) - f_n(x)|^2$

bei Fourierreihen

d.h. die Abweichungen der Funktionenfolge von $f(x)$ sind global gesehen klein genug dass das Integral verschwindet

Es gilt gleichmäßige Konvergenz in x_0 $\Rightarrow$ punktweise Konvergenz in x_0

und punktweise Konvergenz in fast allen $x_0 \in [a,b]$ $\Rightarrow$ Konvergenz im quadratischen Mittel

Bezüglich der Konvergenz von Fourierreihen gelten folgende Aussagen:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch auf $[0, 2\pi]$ und Riemann integrierbar

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe $f_n(x)$ konvergiert gegen $f(x)$ im quadratischen Mittel

Beweis durch explizite Darstellung des Riemann Integrals und Verwendung der Fourierreihe der On/Off Funktion

Satz von Riesz und Fischer:

Wenn $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ konvergiert dann konvergiert die entsprechende Fourierreihe gegen eine quadratintegrable Funktion $f(x) \in L^2$

Bezüglich punktweiser Konvergenz gelten folgende Aussagen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch auf $[0, 2\pi]$ und stetig

$\Rightarrow$ Die Fourierreihe $f_n(x)$ konvergiert $\forall x_0 \in [0, 2\pi]$ punktweise (und damit lokal gleichmäßig) gegen $f(x)$

Siehe Satz von Dirichlet für Erweiterung auf stückweise stetige Funktionen