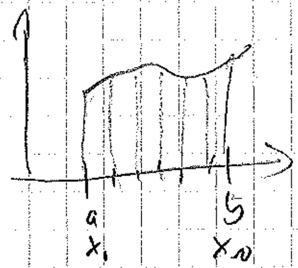
Wiederholung: Funktionenräume

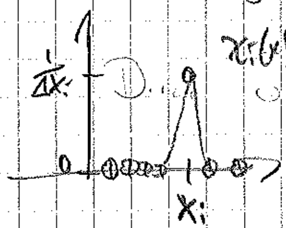



$f(x): [a,b] \to \mathbb{R}/\mathbb{C}$ Darstellung durch Diskretisierung

in $x_i$, $i=1,\dots,N$ im $\lim N\to\infty$

Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \sum_i \Delta x_i\, f^*(x_i)\, g(x_i) \to \int_a^b dx\, f^*(x)\, g(x)$

orthonormale Basisfunktionen $|\chi_i\rangle$ : $\langle \chi_i|f\rangle = f(x_i)$




$\langle \chi_i|\chi_j\rangle = \delta_{ij}$ $\qquad \chi_i(x_j) = \frac{1}{\Delta x_i}\delta_{ij}$

Dirac $\delta$-Distribution

$$\int dx\, \delta(x)\, \psi(x) = \psi(0)$$

weitere Eigenschaften von $\delta(x)$ durch explizites Nachrechnen

Durch die Eigenschaft 2) wird klar

dass die Vektoren $\chi_x^*(z) = \chi_x(z) = \delta(x-z)$

die gewünschte Eigenschaft

$$\langle \chi_x | f \rangle = \int dz\, \chi_x^*(z)\, f(z) = \int dz\, \delta(x-z)\, f(z) = f(x)$$

erfüllen.

Durch 5) folgt das weiteren, dass

$$\langle \chi_x | \chi_y \rangle = \int dz\, \delta(x-z)\, \delta(y-z) = \delta(x-y)$$

eine <u>verallgemeinerte Orthogonalitätsbeziehung</u> erfüllen

Wenn wir ausrechnen für beliebige Testfunktionen $f, g$ das Skalarprodukt betrachten

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz\, f^*(z)\, g(z)$$

So gilt unter Benutzung von $\int dx\, |\chi_x\rangle\langle\chi_x|$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \langle f|\chi_x\rangle\langle\chi_x|g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{z}\, f^*(z)\, \delta(x-z)\, \delta(x-\bar{z})\, g(\bar{z})$$

$$= \int dz\, f^*(z)\, g(z)$$

da dies für beliebige Testfunktionen gilt, folgt

$$\int dx\, |\chi_x\rangle\langle\chi_x| = 1$$

eine <u>verallgemeinerte Vollständigkeitsrelation</u> auf dem Funktionenraum

Da $\delta(x)$ stark lokalisiert ist können wir für hinreichend glatte Testfunktionen auch auf das Integral verzichten. Dann gilt

$$\psi(x)\,\delta(x-x_0) = \psi(x_0)\,\delta(x-x_0)$$

da $\delta(x-x_0)$ überall außer bei $x=x_0$ verschwindet

Damit gilt zB

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\,\delta(x-x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x_0)\,\delta(x-x_0)$$

$$= \psi(x_0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \delta(x-x_0)}_{=1} = \psi(x_0)$$

Desweiteren können wir für genügend oft stetig differenzierbare Fkt. $\psi$ auch Ableitungen von $\delta$ sinnvoll definieren

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x)\,\delta'(x-x_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{d}{dx}\Big(\psi(x)\,\delta(x-x_0)\Big) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi'(x)\,\delta(x-x_0)$$

$$= \underbrace{\Big[\psi(x)\,\delta(x-x_0)\Big]_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} - \psi'(x_0)$$

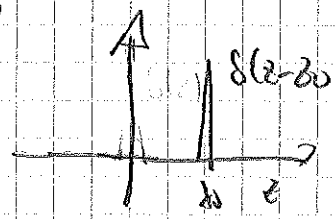
$$= -\psi'(x_0)$$

verallgemeinert für $n \in \mathbb{N}$

$$6) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x) \frac{d^n}{dx^n}\delta(x-x_0) = (-1)^n \underbrace{\psi^{(n)}(x_0)}_{\text{n-fache Ableitung}}$$

Daneben können wir auch eine Stammfunktion von $\delta$ definieren indem wir z.B. betrachten

$$\int_{-\infty}^{x} dz \; \delta(z - x_0)$$




Für $x < x_0$ liegt der Peak ausserhalb des Integrationsintervalls
$x > x_0$ innerhalb

$$(6) \quad \int_{-\infty}^{x} dz \; \delta(z - x_0) = \begin{cases} 0 & x < x_0 \\ 1 & x > x_0 \end{cases} = \Theta(x - x_0)$$

Heaviside Theta Funktion

Dementsprechend gilt

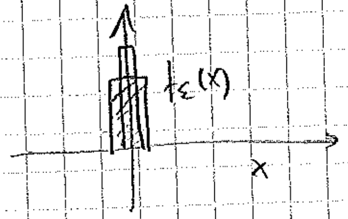
$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{x} dz \; \delta(z - x_0) = \boxed{\delta(x - x_0) = \frac{d}{dx} \Theta(x - x_0)}$$

Welchen Wert $\Theta(0)$ annimmt ist Definitionssache, z.B. $\Theta(0) = \frac{1}{2}$

Neben der abstrakten Definition von $\delta$ als Punktmaß existieren auch explizite Darstellungen von $\delta$ als Grenzwert von Funktionenfolgen $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} f_\varepsilon(x)$

Beispiele mit kompaktem Support

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$




Dann ist

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f_\varepsilon(x) = 1 \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

und

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \psi(x) f_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} dx\, \psi(x) \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\underset{\psi(x) \text{ differenzierbar}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \psi(0) \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon) = \psi(0)$$

der Nachteil dieser Darstellungen ist dass sie nicht überall differenzierbar sind

Beispiele mit nicht-kompaktem Support

Lorentzian: $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$

Poisson: $f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}}{2\varepsilon}$

Gauss: $f_\varepsilon(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}$

oszillierend: $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x}$

## II.4 Fourierreihen

Darstellung von Funktionen bisher durch Potenz- oder Laurentreihen

Nicht immer besonders effizient, z.B. für periodische Funktionen $\sin(x)/\cos(x)$ benötigen viele Terme in Potenzreihendarstellung, viele Eigenschaften nicht offensichtlich

Elemente eines Funktionenraums lassen sich auf verschiedene Weisen darstellen $\rightarrow$ Basiswechsel

Betrachte nun folgende periodische Funktion $f(x)$

<u>Def.</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt <u>periodisch</u> mit Periode $L$

wenn $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+L) = f(x)$

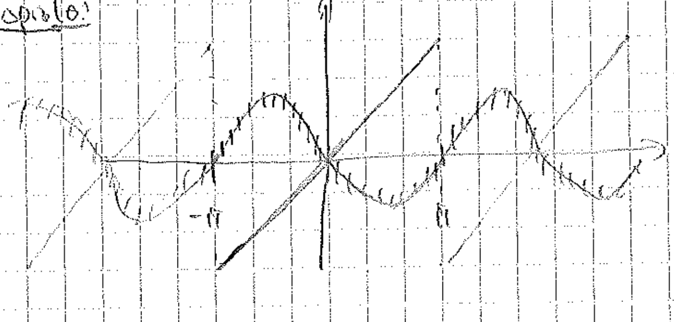
$\Rightarrow \quad f(x+nL) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Da sich eine periodische Funktion also wiederholt lässt sich die Definition auf ein Intervall oBdA $[-\pi, \pi]$ beschränken, nämlich mit

$$F(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}(x+\pi)\right) = F(x + n\,2\pi)$$

wenn $f(x)$ periodisch mit Periode $L$

<u>Beispiele:</u>



Damit wir eine solche Funktion offenbar darstellen können suchen wir ONB auf $[-\pi,\pi]$ mit Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\; f^*(x)\,g(x)$$

Betrachte hierzu als Ansatz

$$\cos(nx)\,,\quad n=0,1,2,\dots$$

$$\sin(mx)\,,\quad m=1,2,\dots$$

benötige sin und cos, da gerade und ungerade Anteile von f dargestellt werden sollen

Betrachte zunächst Orthogonalitätsbedingung

$$\langle \cos,n|\sin,m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\;\underbrace{\cos(nx)}_{\text{gerade}}\,\underbrace{\sin(mx)}_{\text{ungerade}} = 0$$

$$\langle \sin,n|\sin,m\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\;\sin(nx)\sin(mx)$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^2\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\;\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)\left(e^{imx}-e^{-imx}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dx\left[e^{i(n+m)x}-e^{i(m-n)x}-e^{i(n-m)x}+e^{-i(n+m)x}\right]$$

Benutze $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}dx\; e^{ikx} = \begin{cases}\left.\frac{e^{ikx}}{ik}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{ik\pi}}{ik}\left(1-e^{-2\pi ik}\right) = 0 & k\in\mathbb{Z}\wedge k\neq 0\\ 2\pi & k=0\end{cases}$

$$= -\frac{1}{4\pi}\Big[\underset{n+m>0}{0} - 2\pi\delta_{mn} - 2\pi\delta_{mn} + \underset{m+n}{0}\Big]$$

$$= \delta_{m,n} \quad ✓$$