II Funktionenräume & Distributionen

- Elementare Bedeutung für Formulierung der QM

→ Erweiterung von linearer Algebra auf endlich dimensionalen Räumen zu unendlich dimensionalen Räumen notwendig

II.1 Begriffe der lin. Algebra

<u>Vektorraum</u> $(V,\oplus,\odot)$ über einem Körper $K(+,\cdot)$ ist eine Menge ausgestattet mit zwei Verknüpfungen

<u>Vektoraddition:</u> $\oplus: V\times V \to V$

<u>Skalare Multiplikation:</u> $\odot: K\times V \to V$

So dass $\forall\, u,v,w \in V$ und $\alpha,\beta \in K$ gilt

V1 $u\oplus(v\oplus w) = (u\oplus v)\oplus w$ Assoziativität

V2 $\exists\, 0_v\in V: v\oplus 0_v = 0_v\oplus v = v$ Nullelement

V3 $\exists\, -v\in V: v\oplus(-v) = (-v)\oplus v = v$ inverses Element

V4 $v\oplus u = u\oplus v$ Kommutativität

S1 $\alpha\odot(v\oplus w) = (\alpha\odot v)\oplus(\alpha\odot w)$ Distributivität von $\odot\oplus$

S2 $(\alpha+\beta)\odot v = (\alpha\odot v)\oplus(\beta\odot v)$ " von $\odot +$

S3 $(\alpha\times\beta)\odot v = \alpha\odot(\beta\odot v)$ von $\odot\times$

S4 $1\odot v = v$ Neutralität von Einselement

D.h. im allgemeinen können wir Vektoren (= Elemente aus VR) genauso addieren und skalar multiplizieren wie Vektoren aus $\mathbb{R}^3$

Die bekanntesten Beispiele für Vektorräume sind natürlich
$\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ (reeller Vektorraum) oder auch
$\mathbb{C}^n$ über $\mathbb{C}$, allerdings sind das nur die einfachsten
Beispiele z.B. ist auch der Funktionenraum

$$C^1(\mathbb{C},\mathbb{C}) = \{ f(z) : f \text{ holomorph} \}$$

mit der üblichen Addition und Multiplikation ebenfalls
ein Vektorraum
→

<u>Basis:</u> Eine Menge von Vektoren $B=\{v_i\}$ mit $v_i \in V$ über K
ist eine Basis, genau dann wenn

<u>Erzeugendensystem:</u> $\forall v \in V \; \exists \lambda_i \in K : \quad v = \sum_i \lambda_i v_i$

mit <u>eindeutig</u> bestimmten Koeffizienten λ_i

Damit die Koeffizienten eindeutig bestimmt werden
können müssen v_i <u>linear unabhängig</u> sein
d.h. lin

<u>lineare Unabhängigkeit:</u> $\sum_i \lambda_i v_i = 0$ genau dann wenn $\lambda_i = 0 \; \forall i$

Basis $\hat{=}$ linear unabhängiges Erzeugendensystem

Die Anzahl der Basisvektoren (Kardinalität der Menge B)
gibt die Dimension des VR $\dim(B)$

Einfachstes Beispiel ist wieder $\underline{\mathbb{R}^n \text{ über } \mathbb{R}}$

Standardbasis: $(e_i)_j = \delta_{ij} \quad i,j = 1, \dots, n$

also $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

etwas komplizierter ist $\underline{\mathbb{C}^n \text{ über } \mathbb{R}}$

$(e_i)_j = \delta_{ij}$ nicht ausreichend da durch reelle Multiplikation nicht alle Elemente erzeugt werden können

$(e'_i)_j = i\,\delta_{ij}$ zusätzlich benötigt

Damit gibt es $2n$ Basiselemente $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$ als reeller VR

allerdings ist für $\underline{\mathbb{C}^n \text{ über } \mathbb{C}}$

$(e_i)_j = \delta_{ij}$ ausreichend da durch komplexe Multiplikation alle Elemente erzeugt werden können

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$ als komplexer VR

Lineare Abbildungen: $L: V \to W$ heißt linear genau dann wenn

$$\forall\, v,w \in V \quad \forall\, \alpha,\beta \in K$$

$$L(\underbrace{\alpha v + \beta w}_{\in V}) = \alpha \underbrace{L(v)}_{\in W} + \beta L(w)$$

Eine Abbildung

Skalarprodukt: $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \to K$

heißt Skalarprodukt genau dann wenn $\forall\, u,v,w \in V$ $\forall\, \alpha,\beta \in K$

1) Symmetrisch/hermitesch

$$\langle v,w \rangle = \left(\langle w,v \rangle\right)^* \qquad (\Rightarrow \langle v,v \rangle \in \mathbb{R})$$

2) Linearität im 2. Argument

$$\langle u, \alpha v + \beta w \rangle = \alpha \langle u,v \rangle + \beta \langle u,w \rangle$$

3) Antilinearität im 1. Argument

$$\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha^* \langle u,v \rangle + \beta^* \langle v,w \rangle$$

4) positiv definit $\langle u,u \rangle \geq 0$ mit $\langle u,u \rangle = 0$ genau wenn $u=0$

Norm: Skalarprodukt induziert eine Norm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v \rangle}$$

Ein vollständiger VR mit Skalarprodukt heißt Hilbertraum

Vollständigkeit $\Leftrightarrow$ Konvergenz von Cauchy-Folgen

Das Skalarprodukt lässt sich am einfachsten in einer Darstellung durch eine Basis auswerten

<u>Bemerkung:</u> Existenz einer Basis für endlich dimensionale Vektorräume einfach, für unendlich dimensionale VR benötigt Auswahlaxiom

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underbrace{v_i \underline{e}_i}, w_j \underline{e}_j \rangle = v_i^* w_j \underbrace{\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle}_{= \underline{M}_{ij}}$$

Einstein Summenkonvention

Matrix

Entsprechend 1) gilt $\langle e_j, e_i \rangle = (\langle e_i, e_j \rangle)^*$

$$M_{ji} = (M_{ij})^* \Rightarrow (M^\dagger)_{ij} = M_{ij}$$

M ist hermitesch/selbstadjungiert

Der einfachste Fall liegt vor wenn

<u>Orthonormalbasis (ONB)</u>: $\langle \underline{e}_i, \underline{e}_j \rangle = \delta_{ij}$

(z.B. Standardbasis in $\mathbb{R}^n$)

in diesem Fall können wir jeden Vektor sehr einfach in der ONB darstellen, nämlich gilt

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle v_i \underline{e}_i, w_j \underline{e}_j \rangle = v_i^* w_j \langle e_i, e_j \rangle$$

Wähle v_i so dass nur eine Komponente nicht verschwindet $\Rightarrow$ $w_j = \langle \underline{e}_i, \underline{w} \rangle$