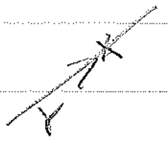
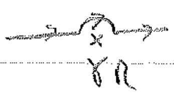
Wiederholung: Singularitäten auf der Integrationskontur



- Definition des Integrals erfordert zusätzliche Informationen

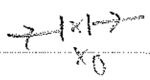
- Definition in $\mathbb{C}$ erlaubt umlaufen der Singularität

$$L \int_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_L} dz\, f(z) \qquad \text{Linkswert}$$



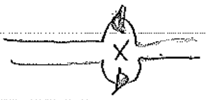
$$R \int_\gamma dz\, f(z) = \int_{\gamma_R} dz\, f(z) \qquad \text{Rechtswert}$$

Cauchy Hauptwert:



$$P \int_a^b dx\, f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{x_0-\varepsilon} dx\, f(x) + \int_{x_0+\varepsilon}^b dx\, f(x) \right]$$

Generell gilt



$$(L-R) \int_\gamma dz\, f(z) = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z_0}(f)$$

d.h. insbesondere 0 für hebbare Singularitäten

$$L \int_\gamma dz\, f(z) = R \int_\gamma dz\, f(z) = P \int_\gamma dz\, f(z)$$

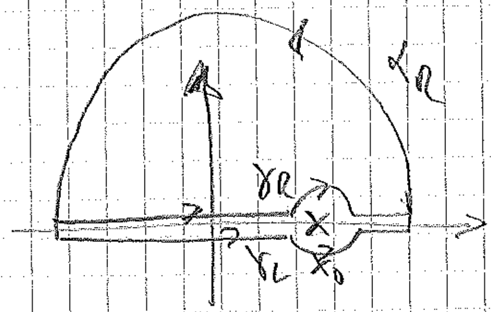
wohingegen für Pole 1-ter Ordnung

$$P \int_\gamma dz\, f(z) = \frac{1}{2}(L+R) \int_\gamma dz\, f(z)$$

Dispersionsrelationen

Sei $f(z)$ holomorph auf der oberen Halbebene $(\mathrm{Im}(z) \geq 0)$ mit $\lim\limits_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ dann gilt

$$f(x_0) = \frac{1}{i\pi} \, P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{f(x)}{x-x_0}$$



Der Integrand $\frac{f(x)}{x-x_0}$ hat einfachen Pol bei $x = x_0$ sowie mögliche Singularitäten in der unteren Halbebene

Der Beitrag entlang α_R lässt sich abschätzen durch

$$\alpha_R: \quad z(\varphi) - x_0 = R e^{i\varphi}$$

$$\left| \int_{\alpha_R} \frac{f(z)}{z-x_0} \right| \leq \left| \int_0^\pi d\varphi \, iR \, \frac{f(Re^{i\varphi})}{iRe^{i\varphi}} \right|$$

$$\leq \int_0^\pi d\varphi \, \left| f(Re^{i\varphi}) \right| \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

da nach Annahme $f(z) \xrightarrow{|z|\to\infty} 0$

Damit ist

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{1}{2} L \int_\gamma dz \frac{f(z)}{z-x_0} + \frac{1}{2} R \int_\gamma dz \frac{f(z)}{z-x_0}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\gamma_L+\alpha_R} dz \, \frac{f(z)}{z-x_0} + \underbrace{\frac{1}{2} R \int_{\gamma_R+\alpha_R} dz \, \frac{f(z)}{z-x_0}}_{=0 \text{ keine Singularität eingeschlossen}}$$

$$= \frac{1}{2} 2\pi i \, f(x_0)$$

Dies heisst für $f(z) = u(x,y) + i\, v(x,y)$

$$u(x_0,0) = \frac{1}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v(x,0)}{x-x_0}$$

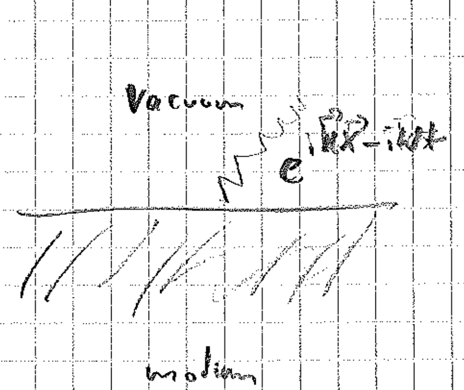
$$v(x_0,0) = -\frac{1}{\pi}\, P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(x,0)}{x-x_0}$$

Kramers-Kronig Relation

D.h. wir sehen hier ganz explizit, dass Real- und Imaginärteile der analytischen Funktion $f(z)$ nicht unabhängig voneinander sind

Diese Beziehungen spielen in der Physik eine wichtige Rolle, z.B. ist der retardierte Propagator $G_R(\omega)$ i.A. analytisch in der oberen Halbebene

Die Real- und Imaginärteile übersetzen z.B. Dispersion und Absorption, die also nicht unabhängig voneinander sind



$\omega \in \mathbb{R}$

$|k| = \frac{\omega}{c}\, n(\omega)$ mit $n(\omega) \in \mathbb{C}$

$Re(n(\omega))$ Propagation

$Im(n(\omega))$ Dämpfung

Entsprechend Kramers-Kronig Relation sind diese Phänomene verknüpft

Sattelpunktsnäherung

Wir hatten bereits gesehen dass Real- und Imaginärteile holomorpher Funktionen auf offenen Gebieten keine lokalen Extrema sondern lediglich Sattelpunkte annehmen

Der Beweis ist nur einfach, damit ein lokales Maximum in z_0 vorliegt muss $\varepsilon > 0$ existieren, so dass

$$u(z_0) > u(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) \qquad \forall \varphi \in [0, 2\pi)$$

d.h. die Mitte muss größer sein als alle umliegenden Punkte

Durch Cauchys Integralformel wissen wir allerdings dass holomorphe Funktionen die Mittelwerteigenschaft besitzen

$$u(z_0) = \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \; u(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi})$$

Wenn ein Maximum vorliegt wäre aber

$$u(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) < u(z_0)$$

also erhalten wir mit

$$u(z_0) < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \; u(z_0)$$

einen Widerspruch

Dennoch ist die Kenntnis von Sattelpunkten nützlich z.B. bei der Abschätzung von Integralen im bestimmten Grenzwerte

Betrachte z.B.

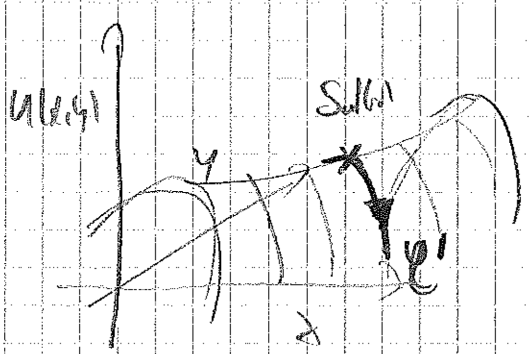
$$I(s) = \int_{\mathcal{C}} dz \; g(z) \; e^{s f(z)}$$

mit f, g holomorph und $s \in \mathbb{R}$

Wenn s groß ist erwartet man, dass hauptsächlich die Punkte entlang der Kurve $\mathcal{C}$ beitragen, wo der Realteil von $f(z)$ klein ist, da andere Beiträge exponentiell unterdrückt werden.

Die Idee ist daher den Integrationsweg $\mathcal{C}'$ auf geeignete Art und Weise zu verformen

so dass die Integrationskurve einen Sattelpunkt durchläuft und entlang der abfallenden Richtung des Sattels entlang geht



Damit wir eine geeignete Kontur finden können betrachten wir die Funktion $f(z)$ in der Umgebung des Sattels z_0

$$f(z) = f(z_0) + (z-z_0)\underbrace{f'(z_0)}_{=0 \ \text{Sattelpunkt}} + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2 + O(z-z_0)^3$$

Wir nehmen der Einfachheit halber an dass $f''(z_0) \neq 0$, da wir ansonsten höhere Ordnungen betrachten müssen

Wenn wir nun eine Kontur so wählen dass $\mathcal{C}: t \mapsto z(t)$

$$\frac{1}{2} f''(z_0)(z(t)-z_0)^2 = -t^2/2 < 0$$

ist dann gilt für Real- und Imaginärteil

$$\mathrm{Im}(f(z)) \approx \mathrm{Im}\left(f(z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z-z_0)^2\right)$$

$$= \mathrm{Im}(f(z_0)) + \frac{1}{2} \underbrace{\mathrm{Im}\left(f''(z_0)(z-z_0)^2\right)}_{=0}$$

$$= \mathrm{Im}(f(z_0))$$

wohingegen

$$\mathrm{Re}(f(z)) \approx \mathrm{Re}(f(z_0)) - t^2/2$$

so dass für den Folgenden gilt