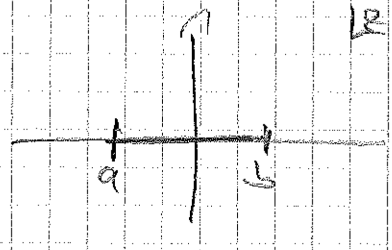
Wiederholung: Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

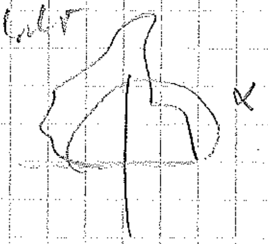
$$I = \int_a^b dx\, f(x)$$



- Definition von $f(z)$ für $z \in \mathbb{C}$

- Bestimmung von Singularitäten von $f(z)$

- Bestimmung geeigneter Kontur, die $[a,b]$ enthält und durch zusätzliche Pfade die Anwendung des Residuensatzes ermöglicht



Bsp: Neue Kontur α liefert neuen Beitrag

Neue Kontur β liefert bis auf Vorfaktor gleichen Beitrag wie $[a,b]$

- Bestimmung von Residuen & Berechnung des Integrals mittels Residuensatz

Bislang haben wir lediglich Integrale betrachtet die nur isolierte Pole in der komplexen Ebene aufweisen.

Oftmals sind wir aber auch interessiert
an Integralen die weitere komplexe analytische Strukturen, z.B. branch cut
in der komplexen Ebene aufweisen

Bsp: $I = \int_0^\infty dx \; \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$

ist wohldefiniertes reelles Integral mit nicht-trivialer Fortsetzung des Integranden in die komplexe Ebene, da

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}}$$ irgendwo einen Wurzelschnitt besitzen muss

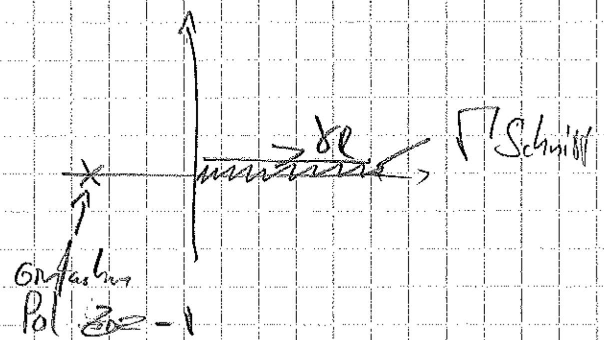
Bislang hatten wir meist den Schnitt nach $\mathbb{R}_-$ gelegt, das ist allerdings problematisch, da in diesem Fall Pol (von $\frac{1}{1+z}$) und Schnitt aufeinanderliegen

Daher ist es besser den Schnitt z.B. auf die positive reelle Achse zu legen

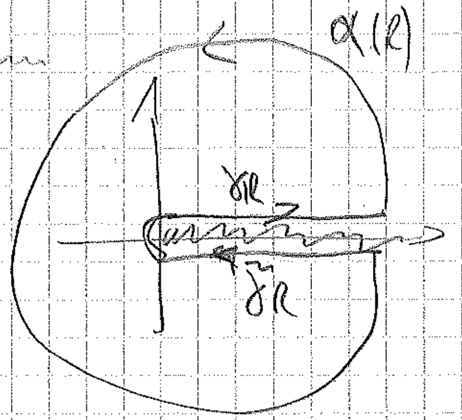
So dass

$$\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi) \quad \text{anstatt} \quad (-\pi, \pi]$$

Damit wir den Residuensatz anwenden können brauchen wir allerdings einen Kontur die den Schnitt vermeidet (gilt nur auf Gebieten mit isolierten Singularitäten)



D.h. es bietet sich an den Schnitt zu umlaufen und die Kontur durch einen Kreis zu schließen. Dann gilt

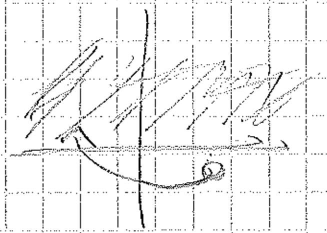


$$I = \int_0^\infty dx \, \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\gamma_R} dz \, f(z)$$

Betrachten wir nun den Beitrag von $\tilde{\gamma}_R$

$$\int_{\tilde{\gamma}_R} dz \, f(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+x-i\varepsilon)\sqrt{x-i\varepsilon}}$$

Da aber entsprechend unserer Wahl des Wurzelschnittes $\sqrt{x-i\varepsilon} = -\sqrt{x}$



$$\int = -\int_{\infty}^{0} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$$

$$= + \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\gamma_R} dz \, f(z)$$

Das heißt das Integral unterhalb des Schnittes liefert in diesem Fall den gleichen Beitrag wie

Der Beitrag entlang $\alpha(R)$ lässt sich abschätzen durch

$$\left| \int_{\alpha(R)} dz \, \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \right| \leq 2\pi R \, \max\left(\left| \frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \right|, z \in Re^{i\varphi} \right)$$

$$\leq \frac{2\pi R}{(R-1)\sqrt{R}} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Damit ist

$$\int_{\tilde{\gamma}_R + \gamma_R + \alpha(R)} dz \, f(z) = 2 \int_{\gamma_R} dz \, f(z) = 2\pi i$$

andererseits ist mittels des Residuensatzes

$$\int_{\tilde{\gamma}_R + \gamma_R + \alpha(R)} dz \, f(z) = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z=-1} \left(\frac{1}{(1+z)\sqrt{z}} \right)$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{\sqrt{-1}} = 2\pi$$

so dass

$$\int_{0}^{\infty} dx \, \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi$$

Berechnung von Reihen mittels Residuensatz

→ speziell für thermische Systeme relevant

„Matsubara Summe"

$$G(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i n \tau}}{(2\pi n)^2 + \sigma^2} \quad \text{mit } \sigma > 0 \text{ und } 0 < \tau < 1$$

Idee: Stelle Summe als Integral einer Funktion dar, die an diesen Stellen Pole erster Ordnung hat

$$x_n = 2\pi n$$

D.h. betrachte Hilfsfunktion

$$\phi(ix) = \frac{1}{e^{ix} - 1}$$

hat Singularitäten bei $x = x_n$. Darüber hinaus gilt für

$$\phi(i(x_n + z)) = \frac{1}{e^{i(x_n + z)} - 1} = \frac{1}{e^{ix_n} e^{iz} - 1}$$

$$= \frac{1}{e^{iz} - 1} = \frac{1}{iz + \frac{(iz)^2}{2} + \dots}$$

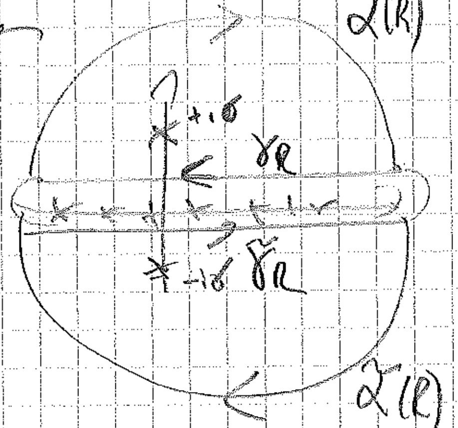
$$= \frac{1}{iz} + O(1)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{ix_n}(\phi(iz)) = (-i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Das Integral ist immer noch schwer zu bestimmen
allerdings können wir nun unsere Tricks
der Funktionentheorie anwenden

Das eigentliche Problem ist dass die bisherige
Kontur unendlich viele Pole einschließt.

Die Pole von $f(z)$ bei $z = \pm i\sigma$ sind
allerdings bislang nicht eingeschlossen



Das können wir ändern
indem wir, wie so oft
Kreisbogen hinzufügen
so lange diese nicht
beitragen

Es lässt sich leicht zeigen dass dies im $\lim_{R\to\infty}$
der Fall ist, so dass

$$\int_{\gamma} dz\, \phi(z) f(z) = \int_{\gamma_R+\alpha} dz\, \phi(z) f(z) + \int_{\tilde{\gamma}_R+\tilde{\alpha}} dz\, \phi(z) f(z)$$

Da $\gamma_R+\alpha$ und $\tilde{\gamma}_R+\tilde{\alpha}$ jeweils nur die Singularitäten
bei $\pm i\sigma$ einschließen gilt

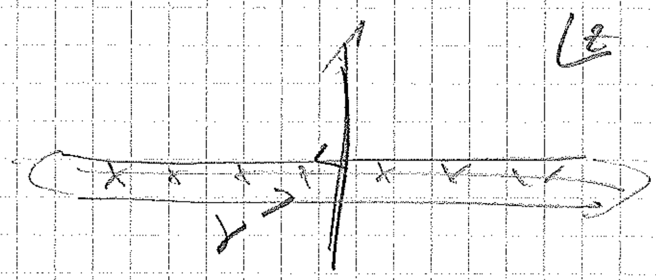
$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} dz\, \phi(z) f(z) = \frac{1}{2\pi}(2\pi i)\left[(-1)\frac{e^{-\sigma\tau}}{e^{-\sigma}-1}\,\frac{1}{+2i\sigma} + (+1)\frac{e^{+\sigma\tau}}{e^{+\sigma}-1}\,\frac{1}{-2i\sigma}\right]$$

Beitrag $z = i\sigma$

$$= \frac{1}{2\sigma}\left[\frac{e^{+\sigma\tau}}{e^{+\sigma}-1} - \frac{e^{-\sigma\tau}}{e^{-\sigma}-1}\left(\frac{e^{\sigma}}{e^{\sigma}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\sigma}\,\frac{e^{\sigma\tau} + e^{\sigma(1-\tau)}}{e^{\sigma}-1}$$

Damit sprechend können wir die Summe darstellen indem wir einen Kontur finden die alle Pole umschließt



Dann ist

$$\int_\gamma dz\, \phi(iz)\, f(z)$$

$$= 2\pi i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)\, f(x_n) + \text{Beiträge von Polen von } f(z)$$

Wenn $f(z)$ in der Nähe der reellen Achse keine Pole besitzt verschwinden diese Beiträge

Dies ist für die gewöhnlichen Funktionen in $G(\tau)$ der Fall, denn für

$$f(z) = \frac{e^{i\tau z}}{z^2+\sigma^2}$$ sind die möglichen Pole bei $z = \pm i\sigma$ $(\sigma > 0)$

daher ist

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma dz\, \phi(iz)\, f(z)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_\gamma dz\, \frac{1}{e^{iz}-1}\, \frac{e^{i\tau z}}{z^2+\sigma^2}$$