Wiederholung:

Bestimmung von Residuum $\mathrm{res}_b(f)$

- Entwicklung in Laurentreihe um $z=b$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-b)^n$$

$$\boxed{\mathrm{res}_b(f) = a_{-1}}$$

- Speziell für rationale Funktionen - Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = P_0(z) + \frac{P_1(z-b_1)}{(z-b_1)^{n_1}} + \dots$$

b_j Nullstellen von $Q(z)$ der Ordnung n_j

$P_j(z-b_j)$ Polynome vom Grad $\leq n_j - 1$

geben Hauptteile der entsprechenden Laurentreihe

- Speziell für $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit g, h holomorph

Singularitäten = Nullstellen von $h(z)$

$f(z)$ Pol erster Ordnung in $z=z_0$

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

- Generell für $f(z)$ mit Pol k-ter Ordnung

$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z-z_0)^k f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

Berechnung reeller Integrale mit Residuensatz

Wir erhalten oftmals reelle Integrale die an komplexen Singularitäten haben

$$I(a,k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \frac{\cos(ax)}{x^2+k^2} \qquad a,k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$$

Komplexifizierung $\cos(ax) = \mathrm{Re}\, e^{iax}$

$$J(a,k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{e^{iax}}{x^2+k^2}$$

Da e^{iax} holomorph auf $\mathbb{C}$ haben wir für den Integrand nur zwei einfache Pole bei $z = ik$ und $z = -ik$

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z-ik)(z+ik)}$$

Die Residuen bei $z = \pm ik$ erhalten wir als

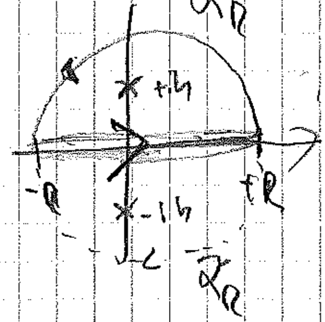
$$\mathrm{res}_{+ik}(f) = \lim_{z \to ik} (z-ik) f(z)$$

$$= \frac{e^{ia(ik)}}{2ik} = -i \frac{e^{-ak}}{2k}$$

$$\mathrm{res}_{-ik}(f) = \lim_{z \to -ik} (z+ik) f(z)$$

$$= \frac{e^{ia(-ik)}}{-2ik} = i \frac{e^{+ak}}{2k}$$

Damit wir den Residuensatz verwenden können müssen wir allerdings einen geschlossenen Kontur verwenden



Wir verwenden die übliche Technik

$$J(a,h) = \lim_{R\to\infty} J_R(a,h) = \int_{-R}^{+R} dx\, f(x)$$

Die Kontur könnten wir oben mit oder unten mit $\bar{\alpha}_R$ schließen, allerdings ist das nur nützlich wenn der zusätzliche Beitrag im $\lim_{R\to\infty}$ verschwindet

$$\alpha_R: \quad \gamma(\varphi) = Re^{i\varphi} \qquad \gamma'(\varphi) = iRe^{i\varphi}$$

$$\int_{\alpha_R} dz\, f(z) = \int_0^{\pi} d\varphi\; iRe^{i\varphi}\, \frac{e^{iaR(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}}{R^2 e^{2i\varphi} + h^2}$$

Betragsmäßige Abschätzung

$$\left| \int_{\alpha_R} dz\, f(z) \right| \le \int_0^{\pi} d\varphi \left| iRe^{i\varphi}\, \frac{e^{iaR(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))}}{R^2 e^{2i\varphi} + h^2} \right|$$

$$\dots \le \pi R\, \frac{e^{-aR}}{R^2 - h^2}$$

D.h. für $a>0$ verschwindet der Beitrag im $\lim_{R\to\infty}$

Wenn wir statt dessen $\tilde{\gamma}_R$ gewählt hätten

$$\tilde{\gamma}_R: \quad \gamma(\varphi) = R e^{-i\varphi} \qquad \varphi \in [0,\pi]$$

sind fast alle Schritte identisch
allerdings gilt

$$\left| \int_{\tilde{\gamma}_R} dz\, f(z) \right| \leq \pi R \frac{e^{+aR}}{R^2 - k^2}$$

D.h. für $a<0$ müssen wir die Kurve mit $\tilde{\gamma}_R$ schließen um das Integral zu berechnen

Die eigentliche Berechnung des Integrals ist nun einfach, denn

$$J(a,k) = \lim_{R\to\infty} J_R(a,k) = \begin{cases} \oint_{\sigma_R + \gamma_R} dz\, f(z) & a>0 \\ \oint_{\sigma_R+\tilde{\gamma}_R} dz\, f(z) & a<0 \end{cases}$$

was aber genau geschlossenen Integrationskurven entspricht, die wir mittels Residuensatz ausrechnen können

$$= \begin{cases} 2\pi i (+1) \operatorname{Res}_{+ik}(f) & a>0 \\ 2\pi i (-1) \operatorname{Res}_{-ik}(f) & a<0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\pi}{k} e^{-ak} & a>0 \\ +\frac{\pi}{k} e^{+ak} & a<0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$J(a,k) = \frac{\pi}{k} e^{-|a|k} \quad \Rightarrow \quad I(a,k) = \mathrm{Re}(J(a,k)) = \frac{\pi}{k} e^{-|a|k}$$

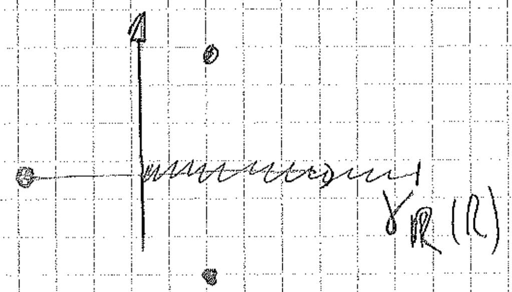
Beim Grenzfall $a=0$ ist es egal wie wir die Kurve schließen, beide Beiträge verschwinden. Die jeweiligen Ausdrücke liefern daher das gleiche Ergebnis.

Damit wir uns mit der Methode vertraut machen betrachten wir weitere Beispiele

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx \qquad \text{reelles (uneigentliches) Integral}$$

Betrachten komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$

Pole bei $z^3 = -1 \Rightarrow z_k = e^{\frac{i\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}ik}$



Nicht offensichtlich wie Integrationskontur zu vervollständigen ist, betrachte daher zunächst Kreisbogen

$$\alpha(R): \quad z(\varphi) = R e^{i\varphi} \qquad \varphi \in [0, \varphi_{max}]$$

$$\int_{\alpha(R)} dz\, f(z) = iR \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi\, e^{i\varphi} \frac{1}{1+R^3 e^{3i\varphi}}$$

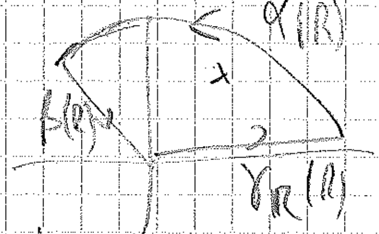
$$\Rightarrow \left| \int_{\alpha(R)} dz\, f(z) \right| \leq \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi \left| iRe^{i\varphi} \right| \left| \frac{1}{1+R^3 e^{3i\varphi}} \right|$$

$$\leq \int_0^{\varphi_{max}} d\varphi\, R \frac{1}{R^3-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

D.h. wir können beliebigen Kreisbogen anhängen

Da wir aber wieder zu $z=0$ zurückkehren müssen, suchen wir noch eine geeignete Gerade

$$\beta(R): \quad z(t) = (R-t)\, e^{i\varphi_{max}}, \quad t \in [0,R]$$



Damit wir φ_{max} geeignet wählen, betrachten wir das Integral

$$\int_{\beta(R)} \frac{1}{1+z^3}\, dz = + e^{i\varphi_{max}} \int_R^0 dt\, \frac{1}{1+t^3 e^{3i\varphi_{max}}}$$

$$= - e^{i\varphi_{max}} \int_0^R dt\, \frac{1}{1+t^3 e^{3i\varphi_{max}}}$$

Wenn also $e^{3i\varphi_{max}} = 1$ erhalten wir bis auf einen Vorfaktor das Originalintegral.
Daher wählen wir am einfachsten

$$\varphi_{max} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \int_{\beta(R)} \frac{1}{1+z^3}\, dz = - e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_0^R dt\, \frac{1}{1+t^3}$$

$$= - e^{\frac{2\pi i}{3}} \int_{\gamma_R(R)} dz\, f(z)$$

D.h. also

$$\int_{\gamma_R(R)+\alpha(R)+\beta(R)} dz\, f(z) = \left(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_{\gamma_R(R)} dz\, f(z)$$

Da $\gamma_R(R)+\alpha(R)+\beta(R)$ eine geschlossene Kurve ist können wir ebenfalls den Residuensatz anwenden

$$\int_{\gamma_R(R)+\alpha(R)+\beta(R)} dz\, f(z) = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{3}}}\left(\frac{1}{1+z^3}\right)$$

Da es sich um eine Pol erster Ordnung handelt gilt

$$\mathrm{Res}_{e^{\frac{i\pi}{3}}}\left(\frac{1}{1+z^3}\right)$$

$$= \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\left(\frac{z-e^{\frac{i\pi}{3}}}{1+z^3}\right)$$

$$\overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{3}}}\left(\frac{1}{3z^2}\right) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

Damit folgt

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\int_{\gamma_R(R)} dz\, f(z) = \frac{2\pi i}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

$$\int_{\gamma_R(R)} dz\, f(z) = \frac{2\pi i}{3}\frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}$$

sieht erstmal komisch aus da wir ein reales Integral erwarten

$$= \frac{\pi}{3}\frac{e^{-\frac{\pi}{3}i}\, e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{\left(\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2i}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{3\sin(-\frac{\pi}{3})}e^{-i\pi} = \frac{\pi}{3\underbrace{\sin(\frac{\pi}{3})}_{=\sqrt{3}/2}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$